

# Prüfungsfragen Pohlmeier

von Christof Degenhart

(<http://Christof-Degenhart.de/Physik>)

## 1 Blatt 1

*Keplerproblem:* Erhaltungsgrößen: Energie, Drehimpuls, Lenz-Runge-Vektor.

*Lenz-Runge-Vektor:* Herleitung aus den Gleichungen:

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{konst.} \quad (1)$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} + \kappa \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0} \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\kappa}{r} = \text{konst.} \quad (3)$$

Daraus ergibt sich der Lenz-Runge-Vektor als:

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \frac{\vec{L}}{\mu} - \frac{\kappa}{\mu} \frac{\vec{r}}{r} \quad (4)$$

*Stoßparameter:* Der Stoßparameter ist definiert als

$$b := r \sin \alpha, \quad a = \angle(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (5)$$

Für den Drehimpuls ergibt sich:

$$|\vec{L}| = \mu |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}| = \mu r \dot{r} \sin \alpha \quad (6)$$

Da der Drehimpuls erhalten ist und  $\dot{\vec{r}}(t = -\infty) = \dot{\vec{r}}(t = +\infty)$ , ist der Stoßparameter

$$b = \frac{|\vec{L}|}{\mu \dot{r}} \quad (7)$$

für  $t = -\infty$  gleich dem für  $t = +\infty$ .

*Geschwindigkeit des Meteor:* Die Geschwindigkeit im Unendlichen ist nicht  $v = v_0 + C$ , weil das Potential zu langsam abfällt (mit  $1/r$ ). Warum?

## Statistische Mechanik:

*Entropie:* Die Entropie hängt aufgrund der Gibbsschen Fundamentalform

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (8)$$

von  $E, V, N$  ab.

*Gleichgewichtsbedingungen:* Ein System im Gleichgewicht nimmt den Zustand maximaler Entropie ein. Die Entropiefunktion

$$S = \int_0^x \frac{dQ(T)}{T} = \int_0^x \frac{dE - pdV}{T} \quad (9)$$

ist dann maximal, wenn die 1. Ableitung gleich Null (Gleichgewichtsbedingung)

$$dS = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dE_1 + \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dV_1 = 0 \quad (10)$$

und die zweite Ableitung kleiner Null (Stabilitätsbedingung)

$$\left( \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right)_V dE^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial V} \right) dE dV + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right)_E dV^2 \leq 0 \quad (11)$$

ist.

*Definition Temperatur:* In der statistischen Thermodynamik:

$$T(E, V, N) = \frac{\partial E}{\partial S} \quad (12)$$

In der phänomenologischen Thermodynamik: Man bestimmt die relative Temperatur durch das Verhältnis

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \quad (13)$$

Dabei definiert man 1 *Kelvin* als den 273,16ten Teil des Tripelpunkts von Wasser. Der Nullpunkt der Temperatur ist durch den Nernstschen Satz (sog. 3. Hauptsatz der Thermodynamik) beschrieben, als der Punkt, an dem alle Systeme im Gleichgewicht die Entropie Null haben.

*Definition Druck:* In der statistischen Thermodynamik:

$$p(E, S, N) = -\frac{\partial E}{\partial V} \quad (14)$$

In der phänomenologischen Thermodynamik ist er wohl als Kraft pro Fläche ( $p = F/A$ ) definiert.

## 2 Blatt 3

*Zwangsbedingungen:* (2) - holonom-skleronome:  $F_\alpha(\vec{z}) = 0$

- holonom-rheonome:  $F_\alpha(\vec{z}, t) = 0$

- nichtholonom:  $F_\alpha(\vec{z}, \dot{\vec{z}}, t) = 0$

Nichtholonyme Zwangsbedingungen kann man integrieren, wenn sie in der folgenden Form vorliegen

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q, t) dq_j + b_k(q, t) dt = 0 \quad (1)$$

und außerdem gilt:

$$a_{kj} = \frac{\partial F_k}{\partial q_j}, \quad b_k = \frac{\partial F_k}{\partial t} \quad (2)$$

Notwendige (und im wesentlichen hinreichende) Bedingung dafür ist

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial b_k}{\partial q_i} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial t} \quad (3)$$

Die nichtholonomenen Zwangsbedingungen liefern außerdem für festen Zeiten noch eine weitere Bedingung an die virtuellen Verrückungen, nämlich

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} \delta q_j = 0 \quad (4)$$

Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips  $\vec{Z} \cdot \delta \vec{z} = 0$  erhält man daraus die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{s'} \lambda_k(t) a_{kj} = 0 \quad (5)$$

und mit (1):

$$\sum_{j=1}^f a_{kj}(q, t) \dot{q}_j + b_k(q, t) = 0 \quad (6)$$

Frage: Wieviel Zwangsbedingungen sind davon jetzt nichtholonom, wieviel holonom? (vgl. zu dieser Fragestellung auch das Pohlmeier-Skript S. 40f.).

*E-Feld:* Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad (7)$$

wobei  $\sigma$  die Leitfähigkeit und  $A$  den Querschnitt darstellt. Für einen unregelmäßig geformten Körper erhält man den Gesamtwiderstand durch Integration:

$$R_{ges} = \int_0^l \frac{dl'}{A(l')\sigma} \quad (8)$$

Mit  $U = CQ = El \Rightarrow C\dot{Q} = -CI = -C\frac{U}{R_{ges}} = \dot{E}l$  erhält man:

$$\frac{EC}{R_{ges}} + \dot{E} = 0 \quad (9)$$

Ob die DGL stimmt, weiß ich nicht. Man erhielte jedenfalls:

$$E = E_0 e^{-\frac{C}{R_{ges}}t} \quad (10)$$

*Zustandsgleichung:* (4) Geg.:  $pV = \text{konst.}$  für  $T = \text{konst.}$  und  $E = E(T)$ . Es ist

$$E(T) = \frac{3}{2}kT \quad (11)$$

Für den Druck, den ein Teilchen auf eine Gefäßwand ausübt, findet man:  
 $p_{\text{Teilchen}} = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p}{\Delta t A} = \frac{\Delta p v}{\Delta t A}$ . Der Gesamtdruck ist also:  $p_{\text{gesamt}} = \frac{1}{6} \frac{2mv^2}{V} N$ .  
 Somit ist

$$pV = \frac{3}{2} \frac{1}{2} mv^2 N = \frac{2}{3} NE = NkT \quad (12)$$

*Clausius-Clapeyron-Gleichung:* (5) Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Umwandlungswärme bestimmen, d.h. die Energie, die man einem Teilchen zuführen muß, um es z.B. von der flüssigen Phase (Phase 2) in die Dampfphase (Phase 1) überführen will.

Mit Hilfe der Maxwell-Relation

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\partial^2 G}{\partial N \partial T} = -\frac{\partial \mu}{\partial T} \quad (13)$$

ergibt sich für die Umwandlungswärme  $q = \frac{\delta Q}{dN} = -T \left[ \frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right]$ . Aus  $G = N\mu$  folgt die Maxwell-Relation

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial p} = \frac{V}{N} =: v \quad (14)$$

Also folgt wegen  $\mu_1 - \mu_2 = 0$  die Clausius-Clapeyron-Gleichung:

$$q = T(v_1 - v_2) \frac{dp}{dT} \quad (15)$$

Die Umwandlungswärme muß aufgebracht werden, weil die Teilchen beim Verdampfen Arbeit gegen die Anziehungskräfte leisten müssen.

### 3 Blatt 8

*Parametrisierung beim Flächenintegral:* (vgl. Großmann, Mathematischer Einführungskurs in die Physik, Zusammenschrieb, S. 26).

Die Fläche sei durch die Menge der parametrisierten Ortsvektoren  $\vec{r}(s, t)$  beschrieben. Dann gilt für den infinitesimalen Tangentialvektor  $d\vec{r}$  an die Fläche:

$$d\vec{r}(s, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \quad (1)$$

Also läßt sich ein infinitesimales Flächenstück darstellen als

$$d\vec{f} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt. \quad (2)$$

Also läßt sich ein Flächenintegral auf folgende Weise parametrisieren:

$$\int_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}(\vec{r}) = \int_D \vec{A}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt \quad (3)$$

wobei  $D$  der Definitionsbereich der Parameter  $s, t$  ist.

*E-Feld einer isolierten Kugel:* In bzw. auf der Kugel sei die Ladung  $Q$  verteilt. Dann gilt nach dem Gaußschen Satz für den Fluß durch ihre Oberfläche:

$$\Phi = \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Also erhält man mit Hilfe der Formel für die Kugeloberfläche  $F_{Kugel} = 4\pi R^2$  für das Elektrische Feld an der Kugeloberfläche:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \quad (5)$$

Das Feld im Innern der Kugel ist entweder Null (Hohlkugel) oder nimmt vom Mittelpunkt aus proportional zu  $r$  bis zum Rand  $R$  hin zu (homogen geladene Vollkugel).

Bringt man in die Nähe der Kugel eine Ladung  $q$ , so wird auf der Kugel Ladung influenziert. Mit der Methode der Bildladungen kann man eine virtuelle Ladung bestimmen, die sich im Innern der Kugel mit der Ladung  $q'$  befinden müsse, um zusammen mit  $q$  die Influenzladung zu erzeugen. Für das Potential einer geerdeten Kugel erhält man: (vgl. Honerkamp-Römer, S. 233ff.)

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{a}{y} \frac{q}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{y^2} \vec{y} \right|} \right) \quad (6)$$

wobei sich  $q$  am Ort  $\vec{y}$  befindet und  $q' = -\frac{a}{y}q$  am Ort  $y' = \frac{a^2}{y}$  und  $a$  der Kugelradius ist. Auf der isolierten Kugel mit Ladung  $Q$  wird die Ladung  $q'$  influenziert, der Rest  $(Q - q')$  verteilt sich gleichmäßig auf der Oberfläche und erzeugt dabei ein Potential

$$\phi_{Ladung}(r) = \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\vec{r}|} \quad (7)$$

Also ergibt sich insgesamt das Potential

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{a}{y} \frac{q}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{y^2} \vec{y} \right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\vec{r}|} \right) \quad (8)$$

*Kraft zwischen zwei dünnen Drähten:* Wir bestimmen das B-Feld eines unendlich langen Drahtes, der in Richtung der z-Achse zeigt, mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (9)$$

Sei z.B.  $\vec{J}(\vec{r}) = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_3$ , dann ergibt sich für das B-Feld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi R} \vec{e} \quad (10)$$

$$\text{mit: } \vec{e}(x, y) = \frac{(x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1)}{R}, \quad R^2 = x^2 + y^2$$

Für die Kraft die auf ein Leiterelement  $d\vec{l}$  wirkt, durch das der Strom I fließt gilt nun:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (11)$$

Für die Kraft eines unendlich langen geraden Leiters 1 auf das Leiterelement  $d\vec{l}$  eines im Abstand R dazu parallelen, unendlich langen Leiter 2 erhält man so:

$$d\vec{F} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dz (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \quad (12)$$

Daraus ergibt sich die Kraft pro Längeneinheit  $k = \frac{dK}{dz}$ .

Man kann diese Gesetzmäßigkeit auch auf eine andere Art und Weise erhalten: Mit Hilfe des Maxwell-Gesetzes  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_F d\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \int_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_F d\vec{F} \cdot \vec{J} = I \\ \Rightarrow H &= \frac{I}{2\pi R} \end{aligned} \quad (13)$$

Also erhält man mit der Formel für die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L = I\vec{l} \times \vec{B}$ :

$$d\vec{F} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl \quad (14)$$

Mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel zeigt sich, daß sich die Leiter anziehen, wenn der Strom durch sie in die gleiche Richtung fließt.

*Wärmeleitung im Zylinder:* Bei einem isolierten Zylinder hat man ein Neumannsches Randwertproblem zu lösen:  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \forall t, \vec{x} \in \partial V$ . Mit dem Separationsansatz  $u(\vec{x}, t) = X(\vec{x}) Y(t)$  erhält man aus der Wärmeleitungsgleichung

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta \right) u(\vec{x}, t) = 0 \quad (15)$$

Für  $Y(t)$  die Lösung  $Y(t) = Y_0 e^{-\lambda t}$ . Für  $X(\vec{x})$  hat man den Laplace-Operator in der Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2) X(\vec{x}) = 0 \quad (16)$$

in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  zu entwickeln. Aufgrund von (39) ergibt sich (vgl. (44)):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) u(\rho, \phi) = 0, \quad (17)$$

Mit Hilfe eines erneuten Separationsansatzes ergibt sich für  $\phi$  eine Funktion der Art:

$$\Phi(\phi) = C_m e^{im\phi} \quad (18)$$

Für die Radialvariable  $r$  ergibt sich eine Bessel-Differentialgleichung (vgl. (48)), deren Lösung Besselfunktionen sind. Die Lösung für die Variable  $z$  ist eine Fourierreihe mit den orthogonalen Funktionen  $\cos(nx)$ . (Kosinus wegen der Neumannschen Randbedingung; bei Dirichlet nimmt man Sinus; vgl. dazu auch A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI: Partielle Differentialgleichungen der Physik, Kap. 4)

## 4 Blatt 22

*Green-Funktion für Schwingungsgleichung:* Eine Schwingungsgleichung hat die Form  $Lx = f$ , wobei  $L$  ein linearer Differentialoperator ist und  $f$  eine - eventuell vorhandene - Schwingungen erzwingende Kraft. Die Gleichung ist gelöst, wenn man eine lineare Abbildung  $G$  findet, für die gilt:  $LG = \mathbf{1}$ . Dann hat man nämlich eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL gefunden:  $x^{(0)} = Gf$ . Für die Green-Funktion  $G$  muß also gelten:

$$LG(t, t') = \delta(t - t') \quad (1)$$

Um die Greensche Funktion eines Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten

$$L \left( \frac{d}{dt} \right) = \sum_{r=0}^N L_r \left( \frac{d}{dt} \right)^r \quad (2)$$

zu berechnen, nützen wir die Beziehung von  $G$  zu seiner Fourier-Transponierten aus:

$$\begin{aligned} G(t - t') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \tilde{G}(\omega) \\ &=: \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

Da die Delta-Funktion darstellbar ist als

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \quad (4)$$

folgt so:  $L(i\omega)\tilde{g}(\omega) = 1$  und damit folgt für  $\tilde{g}(\omega) = 1/L(i\omega) =: Y(i\omega)$  für die Green-Funktion:

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} Y(i\omega) \quad (5)$$

*Normalschwingungen:* Definition: Als Normal- oder Eigenschwingung bezeichnet man eine Schwingungsform, bei der nur *eine* Normalkoordinate  $Q_k$  mit der entsprechenden Eigenfrequenz  $\Omega_k$  oszilliert. Alle anderen Normalkoordinaten sind Null. Als Normalkoordinaten bezeichnet man die Koordinaten einer Schwingung, wenn als Basis die Eigenvektoren  $v^{(\alpha)}$  gewählt wurden:

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha}(t) v^{(\alpha)} \quad (6)$$

Wie man jetzt die Eigenfrequenzen über die Energie ausrechnet ist mir nicht ganz klar. Vielleicht spielt die Lagrange-Funktion dabei eine Rolle (vgl. Hohnerkamp-Römer, S. 112f.). Wenn man die Hamilton-Funktion bilden würden und davon das Maximum bestimmte, müßte man eigentlich die Eigenfrequenzen erhalten.

*Kanonische Gesamtheit:* Keine phänomenologische Thermodynamik!

## 5 Blatt 7

*Identität:* Siehe Theoretikum II, Blatt 9, Aufgabe 23 (i).

*Rotierende Bezugssystem:* Man leitet  $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + b\vec{e}_i(t)$  zweimal ab und erhält:

$$m\vec{a} = m\vec{r} \underbrace{- m\vec{R}}_{(1)} \underbrace{- 2m(\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{(2)} \underbrace{- m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{b})}_{(3)} \underbrace{- m\vec{\Omega} \times \vec{b}}_{(4)} \quad (1)$$

Dabei ist:

- (1) Trägheitskraft der Translation
- (2) Corioliskraft
- (3) Zentrifugalkraft
- (4) Trägheitskraft der Rotation

Zur Corioliskraft: Man stelle sich vor, man werfe von einem sehr, sehr hohen Turm einen Stein auf die Erde. Da man auf der Spitze des Turms eine sehr viel größere Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad |\vec{r}| > |\vec{R}| \quad (2)$$

als auf der Erdoberfläche ( $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$ ) hat, wird der Stein (in unseren Breiten) nach Osten abgelenkt.

Wir wollen dies nun am Formalismus nachprüfen: Im körperfesten Koordinatensystem zeige  $\vec{e}_1$  nach Osten,  $\vec{e}_2$  nach Norden und  $\vec{e}_3$  nach oben. Wir befinden uns auf der Nordhalbkugel, also hat  $\Omega$  positive 2- und 3-Komponente, die 1-Komponente ist Null. Der Stein fällt nach unten also ist  $\vec{v}_{Stein} = (0, 0, -v_3)$ ,  $v_3 > 0$ . Dann erhält man:

$$\vec{F}_{Coriolis} = 2m(0, 0, -v_3) \times (0, \Omega_2, \Omega_3) = 2m(v_3\Omega_2, 0, 0)$$



Da sowohl  $v_3$  als auch  $\Omega_2$  positiv sind, erfolgt die Ablenkung nach Osten.

*Van-der-Waals-Gleichung:* Die Van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_{\text{Molekül}}^2}\right)(V_{\text{Molekül}} - b) = RT \quad (3)$$

beschreibt näherungsweise das Verhalten realer Gase. Dabei heißt  $a/V_{\text{Molekül}}^2$  *Binnendruck* und  $b$  *Kovolumen*. Bei geringer Dichte sind beide vernachlässigbar.

Welche Gestalt muß nun die Energie-Funktion haben? Die Gibbsche Fundamentalform  $dE = TdS - pdV$  liefert:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

Mit Hilfe der freien Energie-Form  $dF = -SdT - pdV$  erhält man die Maxwell-Relation:

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_T = -\frac{\partial F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (4)$$

Also ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{a}{V^2}$$

Da weiter  $\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = 0$  folgt, also:

$$E = f_1(T) + f_2(V) = f_1(T) - \frac{a}{V^2} \quad (5)$$

*Energie einer Ladungsverteilung:* Die Energie einer Ladungsverteilung ergibt sich aus der Energiedichte  $w_{el} = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}$  durch Integration über das Volumen:

$$W_{el} = \int_V d^3r w_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_V d^3r \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E} \phi \quad (6)$$

Ist  $V$  der gesamte Euklidische Raum, so verschwindet der 2. Term.

Für die Energie eines magnetostatischen Feldes erhält man aus der Energiedichte  $w_{magn} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{E}$  unter Zuhilfenahme der Umformung

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} - (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (7)$$

und der Maxwell-Gleichung  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  bei Integration über den gesamten Euklidischen Raum:

$$W_{magn} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (8)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ergibt sich bei der Herleitung der Energiebilanz aus:

$$dA = \vec{K} \cdot d\vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}(t) dt \quad (9)$$

(vgl. Hohnerkamp-Römer, S. 261f.)

*Potentielle Energien:* (vgl. Hohnerkamp-Römer, S. 267) Die gesamte elektrische potentielle Energie ist gleich der elektrischen Feldenergie. Beim magnetostatischen Feld gilt hingegen:

$$W_{pot}^{magn} = -W_{magn} \quad (10)$$

Das kommt davon, daß im elektrostatischen Fall die Gesamtenergie schon durch die elektrostatische Energie gegeben ist, der magnetische Dipol jedoch durch eine Spannungsquelle aufrechterhalten werden muß, die bei Bewegen des Dipols die auftretende Induktionsspannung kompensieren muß und dabei Energie abgibt.

## 6 Blatt 19

*Binomischer Satz:* Der Binomische Satz lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1)$$

Dabei sind die Binomialkoeffizienten definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases} \quad (2)$$

Bei der Gamma-Funktion sind vor allem folgende Zusammenhänge wichtig:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \quad (3)$$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (4)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad \text{für große } x \quad (6)$$

Die letzte Formel heißt *Stirlingsche Formel*.

$(1+x)^n$  läßt sich also schreiben als

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(n+1) x^k}{\Gamma(n-k+1) k!} \quad (7)$$

Da für  $k > n$  die Binomialkoeffizienten Null werden, kann man die Summe auch bis unendlich laufen lassen, ohne daß sich etwas ändert.

*Schiefe Ebene:* Bei einem Punktteilchen ist die Endgeschwindigkeit erreicht, wenn gilt:

$$F_{Hangabtrieb} + F_{Reibung} = mg \sin \alpha + m\rho \dot{x} = 0 \quad (8)$$

Rollt ein Zylinder die schiefe Ebene herunter, ist seine Beschleunigung nicht ganz so groß, da er noch Rotationsenergie aufbringen muß. Die Schwerkraft übt auf den Zylinder mit Radius  $R$  das Drehmoment

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= RF_g \sin \alpha = Mgr \sin \alpha \\ &= |\vec{L}| = I\dot{\omega} \end{aligned} \quad (9)$$

aus. Da der Zylinder sich nicht im freien Raum dreht, sondern auf der Ebene rollt, dreht er sich mit  $\vec{\omega}$  um den Auflagepunkt A, seine momentane Achse. Nach dem *Steinerschen Satz* gilt für das Trägheitsmoment um A:

$$I = I_S + MR^2 \quad (10)$$

wenn  $I_S$  das Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse ist. Für die Translationsbeschleunigung des Schwerpunkts, der sich also mit  $\vec{\omega}$  um den Auflagepunkt A dreht, gilt so:

$$a = \ddot{s} = R\dot{\omega} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_S}{MR^2}} \quad (11)$$

Ein Vollzylinder hat  $I_S = \frac{1}{2}MR^2$ , ein Hohlzylinder  $I_S = MR^2$ . Für den Vollzylinder erhält man z.B. eine Translationsbeschleunigung von  $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ . (vgl. Gerthsen, 2.3.2.)

Wendet man auf den rollenden Zylinder den Lagrange-Formalismus an (vgl. Greiner, Band 2, Beispiel 16.1), so findet man als generalisierende Koordinaten den Abstand  $s$  des Schwerpunkts von seiner Ausgangslage und den Winkel  $\phi$ , um den sich der Zylinder seit Beginn des Rollens gedreht hat.

Die Zwangsbedingung lautet:

$$\dot{s} = R\omega = R\dot{\phi} \quad (12)$$

Da das Integral der Zwangsbedingung  $f = R\phi - s = 0$  ist, ist sie nicht echt nicht-holonom. Die Koeffizienten aus Gleichung (15) lauten somit:

$$a_\phi = R, \quad a_s = -1 \quad (13)$$

Die Lagrange Funktion  $\mathcal{L} = T - U$  lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\phi}^2 - mg(h - s \sin \alpha) \quad (14)$$

Die beiden generalisierenden Koordinaten  $s$  und  $\phi$  sind jedoch nicht unabhängig voneinander, deshalb kann man nicht einfach die Lagrange-Gleichungen 2. Art bilden, sondern muß die Gleichungen (19) benutzen: (für das Trägheitsmoment wurde  $\Theta_{Vollzylinder} = \frac{1}{2}mR^2$  eingesetzt)

$$m\ddot{s} - mg \sin \alpha + \lambda = 0 \quad (15)$$

$$\frac{m}{2}R^2\ddot{\phi} - \lambda R = 0 \quad (16)$$

$$R\dot{\phi} = \dot{s} \quad (17)$$

Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $s, \phi, \lambda$ .  
Man erhält daraus:

$$\ddot{s} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \sin \alpha \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{1}{3}mg \sin \alpha \quad (20)$$

Für die zusätzlichen Zwangskräfte  $Z_j^* = \sum_{k=1}^{s'} \lambda_k(t) a_{kj}$  ergibt sich:

$$Z_s^* = \lambda a_s = -\frac{1}{3}mg \sin \alpha \quad (21)$$

$$Z_\phi^* = \lambda a_\phi = -\frac{1}{3}Rmg \sin \alpha \quad (22)$$

*Trägheitstensor:* Für die kinetische Energie eines starren Körpers erhält man aus  $\dot{\vec{r}}^{(\alpha)} = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}^{(\alpha)}$  (Bezugssystem im Schwerpunkt):

$$T_{kin} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}I_{mn}\Omega_m\Omega_n \quad (23)$$

$$\text{mit: } I_{mn} = \sum_{\alpha} (\delta_{mn} \vec{b}^{(\alpha)2} - b_m^{(\alpha)} b_n^{(\alpha)}) \quad (24)$$

*Wärmeleitung:* Die erste Wärmeleitungsgleichung lautet (*Fouriersches Gesetz*):

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{ grad } T \quad (25)$$

wobei  $\lambda$  Wärmeleitfähigkeit heißt.

Kombiniert man sie mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = 0 \quad (26)$$

so erhält man mit  $\delta \rho_Q = \rho c dT$  die zweite Wärmeleitungsgleichung:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - k \Delta \right) T = 0, \quad k = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (27)$$

Für eine stationäre ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ) und eindimensionale ( $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ ) ergibt sich ein räumlich linearer Temperaturabfall bzw. -anstieg:

$$T = T_0 + \left( \frac{dT}{dx} \right)_0 \cdot (x - x_0), \quad j_Q = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_0 \quad (28)$$

*Pohlmeyer-Beispiele zur Wärmeleitung:*

(i) Wärmeleitendes Medium im ganzen  $\mathbb{R}^3$ :

Sei  $\Theta_0$  die Temperaturverteilung zur Zeit  $t = 0$ . Dann lautet die Lösung der Wärmeleitungsgleichung:

$$T(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x' G(\vec{x} - \vec{x}', t) \Theta_0(\vec{x}'), \quad t > 0 \quad (29)$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(\vec{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{4\pi kt})^3} e^{\frac{-\vec{x}^2}{4kt}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (30)$$

die dadurch bestimmt ist, daß gilt:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) G = \delta(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (31)$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) T &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Theta_0(\vec{x}') \left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) G(\vec{x} - \vec{x}', t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Theta_0(\vec{x}') \delta(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0, \quad \text{für } t > 0. \end{aligned} \quad (32)$$

(ii) Wärmeleitende Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung, die von einem isolierenden Material umgeben ist (Neumannsche Randbedingung):

Sei wieder  $\Theta_0$  gegeben. Mit dem Ansatz

$$T(\vec{x}, t) = e^{-\Lambda t} \psi(\vec{x}) \quad (33)$$

ergibt sich für  $K^2 = \frac{\Lambda}{k}$  das Randwertproblem:

$$(\Delta + K^2) \psi(\vec{x}) = 0, \quad |\vec{x}| < R; \quad \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} = 0, \quad |\vec{x}| = R \quad (34)$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_{l,m,n} \psi_{l,m,n}(\vec{x}) e^{-Ct} \quad (35)$$

mit

$$\psi_{l,m,n}(\vec{x}) = N_{l,m,n} j_l Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (36)$$

(die  $N_{l,m,n}$  und  $C_{l,m,n}$  sind reelle bzw. komplexe Konstanten).

(iii) Enthalte das  $V_0$  füllende Medium jetzt Wärmequellen.

Dann gilt anstelle von (76) jetzt:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_Q = \Gamma_Q \quad (37)$$

wobei die Funktion  $\Gamma_Q(\vec{x}, t)$  die Randbedingung erfüllt. Zu lösen ist nun die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) T(\vec{x}, t) = \Gamma_Q(\vec{x}, t) \quad (38)$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung ist

$$T_0(\vec{x}, t) = \int_0^\infty dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Gamma_Q(\vec{x}', t') G(\vec{x} - \vec{x}', t - t'), \quad (39)$$

denn sie löst die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) T_0(\vec{x}, t) &= \int_0^\infty dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Gamma_Q(\vec{x}', t') \left( \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \\ &= \int_0^\infty dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Gamma_Q(\vec{x}', t') \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') = \Gamma_Q(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (40)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich also durch Addition dieser speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zur allgemeinen Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

## 7 Blatt 15

*Mathematische Einstimmungsfrage:*

$$\int d^3x e^{-\vec{x}^2} = \int dx \int dy \int dz e^{-x^2} e^{-y^2} e^{-z^2}$$

mit der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

ergibt sich also:

$$\int d^3x e^{-\vec{x}^2} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{8} \operatorname{erf}(x) \operatorname{erf}(y) \operatorname{erf}(z) \quad (2)$$

*Lagrange-Mechanik:*

Zwangsbedingungen (s.o.):

$$F_\alpha(\vec{z}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s \quad (3)$$

Mannigfaltigkeit:

$$M_t^\alpha = \{ \vec{z} \mid \vec{z} \in \mathbb{R}^{3N}, F_\alpha(\vec{z}, t) = 0 \} \quad (4)$$

$$M_t = \bigcap_{\alpha=1}^s M_t^\alpha \quad (5)$$

$M_t$  hat die Dimension

$$f = 3N - s, \quad (6)$$

d.h. das System hat genau  $f$  Freiheitsgrade.

d' Alembertsches Prinzip:

$$\vec{Z} \cdot \delta \vec{Z} = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7)$$

wobei die

$$\delta \vec{Z} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \vec{Z}}{\partial q_i} \delta q_i = (\delta \vec{r}_i, \dots, \delta \vec{r}_N) \quad (8)$$

virtuelle Verrückungen, d.h. Verrückungen tangential an die Mannigfaltigkeit, sind.

Differentialform bei nicht-holonomen Zwangsbedingungen (s.o.):

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} dq_j + b_k dt = 0, \quad k = 1, \dots, s' \quad (9)$$

*Zur Wellengleichung:*

(i) *Die schwingende Saite:* (vgl. Pohlmeier-Skript, S. 47ff.)

Ein-dimensionale Bewegungsgleichung:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \eta(x, t) = 0, \quad 0 < x < l \quad (10)$$

mit den Randwerten: (Dirichletsche Randbedingung)

$$\eta(0, t) = \eta(l, t) = 0 \quad (11)$$

und den Anfangswerten:

$$\eta(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{\eta}(x, 0) = v_0(x) \quad (12)$$

Die Lösung ist bei Vorgabe der Rand- und Anfangswerte eindeutig bestimmt.

Eine spezielle Lösung findet man mit Hilfe des *Separationsansatzes*  $\eta(x, t) = f(x) g(t)$ , der zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) f(x) = 0 \quad (13)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) g(t) = 0, \quad \omega = ck \quad (14)$$

mit den Lösungen

$$f(x) = C_1 \sin(kx + \delta), \quad g(t) = C_2 \sin(\omega t + \gamma) \quad (15)$$

führt, woraus sich

$$\eta(x, t) = C \sin(kx + \delta) \sin(\omega t + \gamma), \quad C = C_1 C_2 \quad (16)$$

ergibt. Nun hat man noch die Randbedingungen zu erfüllen. Es ergibt sich  $\sin(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = 0$  und  $\sin(kl + \delta) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi n c}{l}$ , also:

$$\eta_n(x, t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \gamma_n\right) \quad (17)$$

Die  $k_n$  heißen *Eigenwerte*, die  $\omega_n$  *Eigenfrequenzen* der Saitenschwingung. Die Lösungen  $\eta_n(x, t)$  heißen *stehende Wellen*.

Will man nun Lösungen der Wellengleichung finden, die den Anfangs- und Randbedingungen genügen und die aus einer endlichen oder unendlichen Zahl solcher stehenden Wellen

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x, t) \quad (18)$$

bestehen, so gilt der Satz, daß die trigonometrischen Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots, \quad (19)$$

ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem bilden, d.h. es ist

$$\eta(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (20)$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \eta(x, t) \quad (21)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \eta(x, t) \quad (22)$$

(i) *Die schwingende Membran:* (vgl. Pohlmeier-Skript, S. 50ff.)

Sei  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  die Auslenkung der Membran in der  $x - y$ -Ebene,  $\rho$  die planare homogene Massendichte und  $\sigma = \text{konst.}$  die Spannkraft pro Längeneinheit. Die potentielle Energie ist dann gegeben durch  $E_{\text{pot}} = \sigma \cdot \Delta F$ , wobei  $\Delta F$  die Flächenänderung gegenüber der Ruhelage ist. Die zwei-dimensionale Bewegungsgleichung lautet:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta(x, y, t) = 0, \quad c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (23)$$

mit den Randwerten: (Dirichletsche Randbedingung)

$$\zeta(x, y, t) = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial S \quad (24)$$

und den Anfangswerten:

$$\zeta(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \dot{\zeta}(x, y, 0) = v_0(x, y) \quad (25)$$



Mit Hilfe des *Seperationsansatzes*

$$\zeta(x, y, t) = \psi(x, y) \chi(t) \quad (26)$$

erhält man die beiden Differentialgleichungen:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm k^2 \right) \chi = 0, \quad (\Delta \pm k^2) \chi = 0, \quad (27)$$

Die Randbedingungen schließen das Minuszeichen aus. Für die erste Differentialgleichung ergibt sich:

$$\chi(t) = C \sin(\omega t + \delta), \quad \omega = ck \quad (28)$$

Die Differentialgleichung für  $\psi$  hat in jedem Fall die triviale Lösung  $\psi \equiv 0$ . Um weitere Lösungen zu finden, schauen wir uns einige Spezialfälle an:

a) Die rechteckig eingespannte Membran:  
Der erneute Seperationsansatz

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (29)$$

für auf die Gleichungen:

$$X'' + k_1^2 X = 0 \quad \text{und} \quad Y'' + k_2^2 Y = 0 \quad (30)$$

mit den beiden Lösungen:

$$X(x) = A \sin(k_1 x + \delta_1) \quad \text{und} \quad Y(y) = B \sin(k_2 y + \delta_2) \quad (31)$$

Die Randbedingungen der rechteckigen Membran

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0 \quad (32)$$

ergeben die Phasen  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  und die Eigenwerte  $k_1 = k_{n1} = \frac{\pi}{a} n_1$  und  $k_2 = k_{n2} = \frac{\pi}{b} n_2$  und damit die *Eigenfunktionen*

$$\psi_{n1, n2}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(n_1 \frac{\pi}{a} x) \sin(n_2 \frac{\pi}{a} y), \quad (33)$$

die mit Hilfe des *Skalarprodukts*

$$\langle \psi_{n1, n2}, \psi_{n1', n2'} \rangle := \int_0^a \int_0^b dx dy \psi_{n1, n2}(x, y) \psi_{n1', n2'}(x, y) = \delta_{n1 n1'} \delta_{n2 n2'} \quad (34)$$

normiert sind. Für die *Eigenwerte* ergibt sich:

$$k = \sqrt{k_{n1}^2 + k_{n2}^2} = \sqrt{n_1^2 \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + n_2^2 \left( \frac{\pi}{b} \right)^2} \quad (35)$$

Die Eigenschwingungen der rechteckig eingespannten Membran lauten somit:

$$\zeta_{n1, n2}(x, y, t) = C_{n1, n2} \sin(n_1 \frac{\pi}{a} x) \sin(n_2 \frac{\pi}{a} y) \sin(\omega_{n1, n2} t + \gamma_{n1, n2}) \quad (36)$$

Für die Grundfrequenz  $n_1 = n_2 = 1$  findet man ( $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi}$ ):

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (37)$$

b) Die kreisförmig eingespannte Membran:

Der Rand der Membran sei ein Kreis mit Radius  $R$  um den Ursprung. Zunächst führt man Polarkoordinaten  $\vec{r}(\rho, \phi)$  ein. Der Gradient bzw. Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet:

$$\text{grad} = \frac{\vec{e}_u}{g_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{g_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\vec{e}_w}{g_w} \frac{\partial}{\partial w} \quad (38)$$

$$\Delta = \frac{1}{g_u g_v g_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{g_v g_w}{g_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{g_u g_w}{g_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{g_u g_v}{g_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right] \quad (39)$$

$$\text{wobei } \vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|, \quad \text{usw.} \quad (40)$$

$$\text{und } g_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|, \quad \text{usw.} \quad (41)$$

$$\text{also: } \text{grad} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (42)$$

$$\text{und: } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (43)$$

Also ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi(\rho, \phi) = 0 \quad (44)$$

Die mit Hilfe des Separationsansatzes  $\psi(\rho, \phi) = f(\rho) g(\phi)$  auf die beiden Gleichungen:

$$g'' + m^2 g = 0, \quad \text{mit } m^2 = k_1^2 \rho^2 \quad (45)$$

und

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' + \left( k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f = 0 \quad (46)$$

führt. Die erste Gleichung hat die allgemeine Lösung:

$$g(\phi) = \begin{cases} g_{2m}(\phi) = A_{2m} \cos(m\phi), & m = 0, 1, 2, \dots \\ g_{2m-1}(\phi) = A_{2m-1} \sin(m\phi), & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (47)$$

Die zweite Gleichung führt mit den Abkürzungen  $z = k\rho$  und  $F(k\rho) = f(\rho)$  auf die *Besselsche Differentialgleichung*:

$$F'' + \frac{1}{z} F' + \left( 1 - \frac{m^2}{z^2} \right) F = 0, \quad (48)$$

für die man mittels Potenzreihenansatz die Lösung  $F(z) = B_m J_m(z)$  erhält, wobei  $J_m(z)$  die *Besselfunktion m-ter Ordnung* ist.

Als *Eigenfunktionen* erhält man also:

$$\psi(\rho, \phi) = \begin{cases} N_{2m,n} J_m \cos(m\phi), & m = 0, 1, 2, \dots \\ N_{2m-1,n} J_m \sin(m\phi), & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (49)$$

wobei die  $N$  geeignete Normierungskonstanten sind, die man mit Hilfe des Skalarprodukts findet.

(iii) *Schallwellen in Gasen:*

Es ergibt sich die dreidimensionale Wellengleichung für das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ , das durch  $\vec{s} = \vec{\nabla}\Phi$  und  $p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  gegeben ist, wobei  $\vec{s}$  die *Schnelle*, d.h. die Geschwindigkeit eines Massenpunktes ist:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (50)$$

Als Randbedingung gelte:  $(\vec{s})_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  auf dem Rand  $\partial V$  (Neumannsche Randbedingung)

Mit dem Separationsansatz  $\Phi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \chi(t)$  folgt  $\frac{1}{c^2} \ddot{\chi} + k^2 - \frac{\Delta \psi}{\psi} - k^2 = 0$ , woraus die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\chi} \pm k^2 \chi = 0 \quad \text{und} \quad (\Delta \pm k^2) \psi = 0 \quad (51)$$

erhält. Da die Randbedingungen das Minuszeichen ausschließen, erhält man ( $k = \frac{\omega}{c}$ ):

$$\chi(t) = C \sin(\omega t + \delta) \quad (52)$$

Die zweite Gleichung löst man durch Einführen von Kugelkoordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (53)$$

Den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten kann man sich aus Gleichung 39 herleiten. Es ergibt sich:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (54)$$

$$=: \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \vec{\mathcal{L}}^2 \quad (55)$$

Der zweite Separationsansatz  $\Psi(r, \theta, \phi) = g(r) \mathcal{Y}(\theta, \phi)$  liefert mit  $\lambda(\lambda + 1) = r^2 k_1^2$ :

$$\vec{\mathcal{L}}^2 \mathcal{Y}(\theta, \phi) = \lambda(\lambda + 1) \mathcal{Y}(\theta, \phi) \quad (56)$$

$$g'' + \frac{2}{r} g' + \left( k^2 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{r^2} \right) g = 0 \quad (57)$$

Die Gleichung 56 lösen wir mit Hilfe eines dritten Separationsansatzes:  $\mathcal{Y} = \Theta(\zeta) \Phi(\phi)$ ,  $\zeta = \cos \theta$ . Das ergibt:

$$\Phi'' \pm m^2 \Phi = 0, \quad m^2 = k^2(1 - \zeta^2) \quad (58)$$

und

$$\left\{ \frac{d}{d\zeta} (1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} + \left( \lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - \zeta^2} \right) \right\} \Theta = 0 \quad (59)$$

Für Gleichung 58 ergibt sich sofort die Lösung:

$$\Phi(\phi) = C_m e^{im\phi} \quad (60)$$

Gleichung 59 stellt die *verallgemeinerte Legendre-Gleichung* dar. Die Lösungen  $P_l^m$  (sei ab jetzt  $l := \lambda$ ) dieser Gleichung erhält man aus den Lösungen  $P_l$  der *Legendre-Differentialgleichung*

$$(1 - \zeta^2) P_l''(\zeta) - 2\zeta P_l'(\zeta) + \lambda(\lambda + 1) P_l(\zeta) = 0 \quad (61)$$

durch  $m$ -maliges Differenzieren:

$$P_l^m = (-1)^m (1 - \zeta^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\zeta^{|m|}} P_l(\zeta) \quad (62)$$

Mit Hilfe des Potenzreihenansatzes  $P_l(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$  und der Normierung  $P_l(1) = +1$  erhält man die *Formel von Rodrigues*:

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l \quad (63)$$

Die  $P_l$  heißen *Legendre-Polynome vom Grad  $l$* .

Als vollständige Lösung der Gleichung 56 für die Winkelvariablen erhält man mit 60 die sogenannten *Kugelfunktionen*:

$$\mathcal{Y}(\theta, \phi) = Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m \cos \theta e^{im\phi} \quad (64)$$

mit:  $l = 0, 1, 2, \dots \quad -l \leq m \leq +l$

Eigenschaften:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^* \quad (65)$$

$$Y_{l,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^m Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (\text{Raumspiegelung}) \quad (66)$$

$$\langle Y_{l,m}, Y_{l',m'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{Orthonormalsystem}) \quad (67)$$

Aus Gleichung (57) für die Radialvariable  $r$  erhält man mit Hilfe der Substitution  $g(r) = \frac{F(kr)}{\sqrt{kr}}$  und  $kr = z$  wieder eine *Besselsche Differentialgleichung*, diesmal mit dem Index  $(l + \frac{1}{2})$ : (vgl. Gleichung 48)

$$\frac{d^2}{dz^2} F(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} F(z) + \left( 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{z^2} \right) F(z) = 0, \quad (68)$$

die die Lösung

$$F(z) = A_l J_{l+\frac{1}{2}}(z) \quad (69)$$

mit der *sphärischen Besselfunktion*

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}} \quad (70)$$

besitzt. Also besitzt Gleichung (57) die Lösung:

$$g(r) = \frac{F(z)}{\sqrt{z}} = \frac{A_l J_{l+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}} == A_l \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(z) \quad (71)$$

Die allgemeine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung lautet somit: (vgl. Gleichungen (52), (64), (71))

$$\Phi(\vec{x}, t) = C_{l,m,n} j_l(k_n^{(l)} r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \sin(\omega_n^{(l)} t + \gamma_{l,m,n}) \quad (72)$$

wobei  $k_n^{(l)}$  und  $\omega_n^{(l)}$  die jeweiligen Eigenwerte sind.

Ein Anfangswertproblem löst man, indem man die Fourier-Koeffizienten der Anfangswerte berechnet, daraus die Koeffizienten  $C_{l,m,n}$  bestimmt, und schließlich  $\Phi$  durch Aufsummieren über  $n, l, m$  berechnet (lineare Superposition).

## Zusammenfassung der Vorgehensweise beim Lösen der dreidimensionalen Schwingungsgleichung:

- 1) Für welche Variable gilt die Schwingungsgleichung? (Geschwindigkeitspotential  $\Phi, \dots$ )
- 2) Erster Separationsansatz:  $\Phi(\vec{x}, t) = \chi(t) \psi(\vec{x})$  (Trennung der Zeit- und Ortsvariablen)
- 3)  $\Rightarrow$  Lösung für Zeitvariable:  $\chi(t) = C \sin(\omega t + \delta)$
- 4) Zum Lösen der Helmholtz-Gleichung  $(\Delta + k^2) \psi(\vec{x})$ : Einführung von Kugelkoordinaten
- 5) Zweiter Separationsansatz:  $\Psi(r, \theta, \phi) = g(r) \mathcal{Y}(\theta, \phi)$  (Trennung von Radial- und Winkelvariablen)
- a) Dritter Separationsansatz:  $\mathcal{Y}(\theta, \phi) = \Theta(\zeta) \Phi(\phi)$  (Trennen der Winkelvariablen)
- b) Für  $g(r)$  ergibt sich durch Substitution die Besselsche DGL
- 6)  $\Rightarrow$  Lösung für Variable  $\phi$ :  $\Phi(\phi) = C_m e^{im\phi}$
- 7)  $\Rightarrow$  für  $\zeta$  ergibt sich die Legendre-DGL, deren Lösung sich als Linearkombination der  $P_l^m$  ergibt.
- 8)  $\Rightarrow$  Lösung für die Winkelvariablen: die Kugelfunktionen  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$
- 9) Lösung der Bessel-DGL für die Radialvariable (siehe 5b): die sphärische Besselfunktion  $j_l(kr)$
- 10) Zusammensetzen der Gesamtlösung: vgl. Gleichung (72)

## 8 Blatt 23

*Bahnkurve im  $\mathbb{R}^3$  durch Parameterdarstellung: siehe Volker*

*Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) \phi(x) = \phi(x_0) \text{ Definition} \quad (1)$$

$$t \delta(x) = 0 \quad (2)$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (3)$$

$$\Theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0) \quad (4)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \delta(a\vec{x}) = \frac{1}{|a^3|} \delta(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (7)$$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \quad (8)$$

wobei die  $t_i$  die Nullstellen von  $g$  sind und

$$\Theta := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Eine runde Leiterschleife mit Radius  $r_0$  in der x-y-Ebene lässt sich folgendermaßen durch eine  $\delta$ -Funktion beschreiben:

$$\vec{I}(\vec{r}) = I \vec{e}_z \times \vec{r} \delta(|\vec{r}| - r_0) \quad (10)$$

*Entropiedefinition in der phänomenologischen Thermodynamik:*

$$S(P) = \int_{P_0}^P \frac{\delta Q_{\text{reversibel}}}{T} \quad (11)$$

wobei  $P_0$  der Zustand des Systems im absoluten Nullpunkt ist.

1. *Hauptsatz der Thermodynamik:* Die Konstruktion eines perpetuum mobile 1. Art (verrichtet Arbeit ohne Energie aus äußerer Quelle) ist unmöglich.  
 $\Rightarrow$  die Energie ist Zustandsgröße

2. *Hauptsatz der Thermodynamik:* Die Konstruktion eines perpetuum mobile 2. Art (Erzeugung von Arbeit bloß durch Abkühlung der Umgebung) ist unmöglich.  
 $\Rightarrow$  die Entropie eines abgeschlossenen Systems nimmt niemals ab und erreicht im Gleichgewicht ihr Maximum.

3. *Hauptsatz der Thermodynamik:* (Nernstscher Satz) Im absoluten Nullpunkt ist die Entropie für alle Systeme im Gleichgewicht Null.

0. *Hauptsatz der Thermodynamik:* Systeme befinden sich genau dann im thermischen Gleichgewicht, wenn ihre empirische Temperatur  $T$  gleich ist. Größere Werte von  $T$  entsprechen wärmeren Zuständen.

*Thermische und kalorische Zustandsgleichung:* Will man in der phänomenologischen Thermodynamik ein thermodynamisches Potential bestimmen, so kann man es nicht aus der mikroskopischen Wechselwirkung berechnen, sondern muß eine der beiden Funktionen messen:

a) die thermische Zustandsgleichung  $p = p(T, V)$  oder

b) die kalorische Zustandsgleichung  $E = E(T)$

vorausgesetzt, die Teilchenzahl  $N$  sei konstant.

Man kann nun aus thermischer und kalorischer Zustandsgleichung die Entropie berechnen, denn es gilt:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E(T)}{\partial T} dT + p(T, V) dV \right) \quad (12)$$

Bei adiabatischen Zustandsänderungen gilt:  $\delta Q = 0$

$$\Rightarrow dE = -pdV = -\frac{NkT}{V} dV$$

$$\text{mit: } E = \frac{3}{2}NkT \quad \text{folgt daraus:}$$

$$\frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow T^{\frac{3}{2}} V = \text{konst.} \quad (14)$$

Für die Entropie erhält man daraus mit (12) und dem idealen Gasgesetz:

$$\begin{aligned} S - S_0 &= \int_{S_0}^S dS = \int_{T_0}^T \frac{3}{2} Nk \frac{dT}{T} + \int_{V_0}^V Nk \frac{dV}{V} \\ &= Nk (\ln T^{\frac{3}{2}} V - \ln T_0^{\frac{3}{2}} V_0) \end{aligned} \quad (15)$$

*Kapazität eines Kugelkondensators:* Wegen des Gaußschen Satzes ist das Potential einer kugelförmigen Ladung:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (16)$$

Für einen Kugelkondensator mit den Radien  $R_1$  und  $R_2 (> R_1)$  ergibt sich also:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (17)$$

*Kapazität eines Zylinderkondensators:* Berechnung des Potentials mittels des Gaußschen Satzes: (Sei  $\lambda$  die Ladungsdichte in Coulomb pro Meter)

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$A = 2\pi r l$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (20)$$

Für den Zylinderkondensator mit den Radien  $R_1$  und  $R_2 (> R_1)$  ergibt sich so:

$$c = \frac{C}{l} = \frac{\lambda}{U} = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln R_2 - \ln R_1} \quad (21)$$

*Van-der-Waals-Gas:* Der Übergang von realem zu idealem Gas findet statt, wenn man das Volumen ausreichend vergrößert. Dann spielen nämlich die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen und ihr Eigenvolumen kaum mehr eine Rolle. (Zu den übrigen Fragen siehe oben)

## 9 Blatt 16

*Fourier-Reihe:* Jede Funktion  $f(x)$  ist darstellbar als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega x} c_k \quad (1)$$



mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T dx e^{-ikwx} f(x) \quad (2)$$

z.B.  $c_0$  berechnet sich hier:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 x \stackrel{\text{Bosch}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \pi + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Integration der  $c_k$  für  $k > 0$  ist schwierig und im Endeffekt kommt auch nur das Additionstheorem

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (3)$$

heraus.

*d'Alembertsches Prinzip:* „Zwangskräfte leisten keine Arbeit“ (s.o.)

*Randwertprobleme der Elektrostatik:* Zu lösen ist die Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Da dies eine inhomogene DGL ist, benötigt man eine Green-Funktion, die der folgenden Bedingung genügen muß:

$$\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

Wegen  $\Delta' \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$  findet man:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (6)$$

mit  $\Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ . Aus der 2. Greenschen Identität

$$\int_V d^3r' (\phi \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi) = \int_{\partial V} dF' \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) \quad (7)$$

erhält man mit Hilfe der Poisson-Gleichung (4)  $\phi(\vec{r})$ : für  $G \equiv \psi$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dF' \left( \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right) \quad (8)$$

Hat man nun ein Dirichletsches Randwertproblem ( $\phi$  auf dem Rand von  $V$  gegeben), so wählt man die *Dirichletsche Greensche Funktion*:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{!}{=} 0, \quad \forall \vec{r}' \in \partial V \quad (9)$$

In Gleichung (8) fällt dann im letzten Integral der zweite Term weg.  
 Hat man es mit einer Neumannschen Randbedingung (Normalenableitung  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  auf dem Rand von  $V$  gegeben) zu tun, so wählt man die *Neumannsche Greensche Funktion*:

$$\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \stackrel{!}{=} -\frac{4\pi}{F}, \quad \forall \vec{r}' \in \partial V \quad (10)$$

Man kann nicht  $\frac{\partial G_N}{\partial n'} \stackrel{!}{=} 0$  fordern, denn das stünde im Widerspruch zu:

$$\int_{\partial V} dF' \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = \int_V d^3 r' \Delta' G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \quad (11)$$

Für das Potential ergibt sich also mit Neumannscher Randbedingung:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dF' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} + \underbrace{\frac{1}{F} \int_{\partial V} dF' \phi(\vec{r}')}_{(*)} \quad (12)$$

wobei  $(*)$  der Mittelwert von  $\phi(\vec{r}')$  auf dem Rand von  $V$  ist.

Noch eine Bemerkung zu Gleichung (6): Der erste Term auf der rechten Seite erzeugt das Potential einer Punktladung:

$$\phi_{Punktladung}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (13)$$

während der linke Term das Potential erzeugt, das von den influenzierten Ladungen hervorgerufen wird:

$$\phi_{Influenzladung} = \frac{1}{\epsilon_0} F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (14)$$

*Potential auf Leiteroberfläche:* Das Potential auf einer Leiteroberfläche ist immer konstant, da solange Strom fließt, bis sich ein Ungleichgewicht ausgeglichen hat.

## 10 Blatt 14

*Ableitung von Arkussinus:* Sei  $y(x) = \arcsin x$ . Gesucht ist die Ableitung  $y'(x)$ :

$$\begin{aligned} y = \arcsin x &\Rightarrow x = \sin y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

*Lagrange-Methoden:* Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(\vec{r}(t)) + \vec{Z}(t) \quad (2)$$

wobei  $Z(t)$  die Zwangskräfte des jeweiligen Problems sind.

1) Lagrange-Methode 1. Art:

- Zwangsbedingungen:  $F_\alpha = 0$

- da sowohl die Zwangskräfte als auch die Gradienten der Zwangsbedingungen senkrecht auf der Mannigfaltigkeit steht, auf die das Problem durch die Zwangsbedingungen eingeschränkt ist, kann man die Zwangskräfte als Linearkombination der Zwangsbedingungen ausdrücken:  $\vec{Z} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \vec{\nabla} F_\alpha$

- also ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}(t), t) + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \vec{\nabla}F_\alpha(\vec{r}, t) \quad (3)$$

$$F_\alpha(\vec{r}(t), t) = 0 \quad (4)$$

Beispiel: Sphärisches Pendel: Zwangsbedingung:  $F = |\vec{r}| - l = 0$

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichungen:  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda \vec{r}$  und  $|\vec{r}| - l = 0$

2) Lagrange-Methode 2. Art:

- Einführung geeigneter Koordinaten, die die Zwangsbedingungen erfüllen

- Aufstellen der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = T - U$

- Berechnung der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

- bzw. Multiplikation der Bewegungsgleichungen (2) mit den Tangentialvektoren  $\frac{\partial \vec{z}}{\partial q_i}$  und dadurch Elimination der Zwangskräfte:

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial q_i} \cdot m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (6)$$

Beispiel: Sphärisches Pendel: Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) = m\vec{g} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right) = m\vec{g} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right) \quad (8)$$

$$\text{mit: } \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Setzt man in die Gleichungen ein, so erhält man wieder:

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -g \sin \theta \quad (9)$$

$$\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (10)$$

## 11 Blatt 4

*Virialsatz:* Mittelwert einer beschränkten Funktion:

$$\overline{f} := \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt \quad (1)$$

Herleitung:

$$2T = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \underbrace{\dot{\vec{p}}_i}_{\vec{\nabla}_i U} \quad (2)$$

$$2\overline{T} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \left[ \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right]_{-a}^{+a} + \overline{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U} \quad (3)$$

Ist  $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$  beschränkt in der Zeit, gilt

$$2\overline{T} = \overline{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U} \quad (4)$$

wobei die überstrichene Größe *Virial* heißt.

Ist  $U$  homogen von Grade  $k$ , d.h.  $U(\alpha \vec{z}) = \alpha^k U(\vec{z})$ , gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha \vec{r}_1, \dots, \alpha \vec{r}_N) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = k \alpha^{k-1} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \alpha \vec{r}_i} \frac{\partial \alpha \vec{r}_i}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \alpha \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \end{aligned} \quad (5)$$

Für  $\alpha = 1$  ergibt sich die *Eulersche Gleichung*:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U = kU \quad (6)$$

Beispiele sind das Kepler-Potential  $U(r) = \frac{k}{r}$  mit  $k = 1$  oder das Schwingungspotential  $U(r) = \frac{1}{2} D r^2$  mit  $k = 2$ .

*Vorsicht:* Für das Potential  $k = -2$  erhielte man  $\overline{T} = -\overline{U}$ , also die Gesamtenergie  $E = \overline{E} = \overline{T} + \overline{U} = 0$ , was natürlich Unsinn ist, denn die Voraussetzungen für den Virialsatz, Beschränktheit von  $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$  sowie der gemittelten Größen  $\overline{T}, \overline{U}$ , sind nicht erfüllt: Für eine abstoßendes Potential sind die Bahnen nicht gebunden, für ein anziehendes Potential nähern sich die Teilchen derart, das  $T$  und  $U$  unbeschränkt sind.

*Viererrpotentiale:* Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (7)$$

folgt: Es gibt ein Potential  $A(\vec{r}, t)$  mit:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (8)$$

Aus

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (9)$$

folgt, daß es ein Potential  $\phi$  gibt mit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \quad (10)$$

$$\implies \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (11)$$

$(\phi, \vec{A})$  heißt *Viererpotential*.

Unter den *Eichtransformationen*:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t) \quad (12)$$

$$\phi \mapsto \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (13)$$

bleiben  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  jedoch unverändert. Setzt man die Potentiale in die beiden anderen Maxwell-Gleichungen ( $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  und  $\text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{J}$ ) ein, so erhält man:

$$-\Delta \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (14)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (15)$$

Definition: Sei

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (16)$$

der *d'Alembert-Operator*. Nun hat man zwei Möglichkeiten:

newl i) Man führt die *Lorentz-Eichung* durch:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad (17)$$

aus. Dann erhält man für die Potentiale die Wellengleichung:

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad \square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

Das Viererpotential ist bis auf  $\square \Lambda = 0$  festgelegt.

ii) Man führt die *Coulomb-Eichung* durch:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} 0 \quad (19)$$

Dann ergibt sich aus (14):

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20)$$

Setzt man die Eichtransformierten von  $\phi$  und  $\vec{A}$  in Gleichung (15) ein, so erhält man:

$$\square \vec{A} - \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi - \Delta \Lambda \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (21)$$

Legt man nun das Viererpotential auf  $\Delta\Lambda$  fest, ergibt sich:

$$\square\vec{A} = \mu_0\vec{J} + \vec{\nabla}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = \mu_0\vec{J}_{transversal} \quad (22)$$

Zur letzten Umformung: siehe Greiner, Theophysik Bd. 3, S. 377f.

*Entropieänderung:* Für isotherme Zustandsänderungen ( $dT = 0$ ) gilt aufgrund von (12):

$$dS = \frac{p(T, V)}{T} dV \quad (23)$$

$$\Rightarrow S - S_0 = \int_{V_0}^V \frac{Nk}{V} dV = Nk \ln \frac{V}{V_0} \quad (24)$$

Der Weg günstigste Weg ist wohl der Carnot-Prozeß, der aus isothermen und adiabatischen Zustandsänderungen besteht. Bei den isothermen Zustandsänderungen gilt für die Entropie Gleichung (24), für adiabatische Zustandsänderungen: (s.o.)

$$S - S_0 = Nk(\ln T^{\frac{3}{2}}V - \ln T_0^{\frac{3}{2}}V_0) \quad (25)$$

Der Weg auf dem Blatt besteht aus einer isochoren ( $dV = 0$ ) und einer isobaren ( $dp = 0$ ) Zustandsänderung. Für die isochore Änderung gilt:

$$S - S_0 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{3}{2} \frac{Nk}{T} dT = \frac{3}{2} Nk \ln \frac{T_1}{T_0} \quad (26)$$

Für isobare Änderung erhält man wegen  $\frac{p}{T} = \frac{Nk}{V}$ :

$$S - S_0 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} \frac{Nk}{T} dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{Nk}{V} dV = Nk \left( \frac{3}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (27)$$

*Christof Degenhart*