Lernkartei
Dynamische Systeme

`(http://www.uni-karlsruhe.de/~um3f/TeX/physik.html)`

von Christof Degenhart

nach den Büchern
„*Deterministic Chaos*“ von H.G. Schuster, ^{2}1988
und
„*Order within Chaos*“ von P. Bergé *etal.*, 1984

(Bei den Seitenangaben bezieht sich eine Angabe „S. S*xx*“ auf Seite *xx* im Buch von Schuster und „S. B*xx*“ auf Seite *xx* im Buch von Bergé *etal.*)

Dissipative Systeme

S. S3/B22ff.

Aussage: Man unterscheidet dynamische Systeme in

1. konservative Systeme:
    - Energieerhaltung: geschlossenes System
    - Liouville-Theorem: Volumen im Phasenraum bleibt gleich
    - Invarianz unter Zeitumkehr
2. dissipative Systeme:
    - keine Energieerhaltung: offenes System
    - Liouville-Theorem gilt nicht: Volumen im Phasenraum veränderlich
    - keine Invarianz unter Zeitumkehr

Der freie Oszillator

S. B11ff.

Aussage: Der *freie (ungedämpfte) Oszillator* besitzt folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

wobei θ den Auslenkungswinkel, g die Erdbeschleunigung und l die Pendellänge bezeichne. Im Falle kleiner Auslenkungen gilt näherungsweise

$$\sin\theta \approx \theta$$

und man erhält als Lösung:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{mit} \qquad \omega := \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{und} \qquad T := 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Energie des Systems ergibt sich zu

$$E\left(\dot{\theta}, \theta\right) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos\theta)$$

Klassisches Hamilton-System

S. B16f.

Aussage: In einem klassischen System ist die Energie erhalten. Sie wird durch die *Hamilton-Funktion* $H(q,p)$ gegeben, wobei q die verallgemeinerten Ortskoordinaten und p die verallgemeinerten Impulse wiedergibt. Dann gelten die *Hamilton-Gleichungen*

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

Im Gegensatz zum klassischen Hamilton-System hängt in einem *dissipativen Hamilton-System* die Hamilton-Funktion explizit von der Zeit ab und es gilt:

$$\frac{dH(q,p,t)}{dt} \neq 0$$

Der gedämpfte Oszillator

S. B18ff.

Aussage: Der *gedämpfte Oszillator* besitzt in linearer Näherung ($\sin\theta \approx \theta$) folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 := \frac{g}{l}$$

wobei θ den Auslenkungswinkel, g die Erdbeschleunigung, l die Pendellänge und γ den Dämpfungkoeffizienten bezeichne. Die Energie des Systems ergibt sich zu

$$E\,(\dot\theta, \theta) = \frac{1}{2}(\dot\theta^2 + \omega^2\theta^2)$$

Ein Phasenportrait erhält man, indem man definiert:

$$y := \frac{dx}{dt} := \dot\theta \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dt} := \ddot\theta = -\gamma\dot\theta - \omega^2\theta$$

Da für schwache Dämpfung ($\gamma \ll \omega$) die Lösung derjenigen des freien Oszillators ähneln sollte, setzt man als Lösung an:

$$\theta \simeq \rho(t)\ \cos(\omega t + \phi) \qquad (\star)$$

Unter der Voraussetzung, daß sich $\rho(t)$ innerhalb einer Periode T nur schwach ändert erhält man mit Hilfe der mittleren Energieänderung $\frac{dE}{dt}$:

$$\rho(t) = \rho(0)\ e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$$

D.h. für positive Reibung ($\gamma > 0$) spiralen die Lösungen ($\star$) nach innen auf den Fixpunkt $\theta = \dot\theta = 0$ (Ursprung) zu. Für $\gamma < 0$ spiralen sie von diesem Weg ins Unendliche und für $\gamma = 0$ beschreiben die Trajektorien wie beim freien Oszillator Kreise um den Ursprung. Man nennt den Ursprung dann *marginal stabil.*

Attraktor

S. B22

Aussage: Zeichnet man das Phasenportrait einer Gleichung und enden dabei lokal alle Trajektorien in einem festen Punkt, einer festen Linie usw. des Phasenraums, so spricht man von einem *Attraktor*.

Van-der-Pol-Gleichung

S. B25ff.

Aussage: Der gedämpfte Oszillator besitzt in linearer Näherung ($\sin\theta \approx \theta$) folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 := \frac{g}{l} \qquad (\star)$$

wobei θ den Auslenkungswinkel, g die Erdbeschleunigung, l die Pendellänge und γ den Dämpfungkoeffizienten bezeichne. Bei positiver Dämpfung ($\gamma > 0$) spiralen die Lösungen in den Ursprung, bei negativer Dämpfung wachsen sich ins Unendliche. Um dem entgegenzuwirken, d.h. die Energie für $\gamma < 0$ zu begrenzen und für $\gamma > 0$ den Energieverlust durch Reibung zu kompensieren, setzte *Van der Pol* den Reibungskoeffizienten als Funktion von θ wie folgt an:

$$\gamma(\theta) := \gamma_0\left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right) \qquad \text{mit} \qquad \gamma_0 > 0$$

d.h. für kleine θ ist $\gamma < 0$ (Energiezufuhr) und für große θ ist $\gamma > 0$ (Reibung). Setzt man $\gamma(\theta)$ in ($\star$) ein und macht die Gleichung dimensionslos, ergibt sich:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\epsilon - \theta^2)\frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \qquad \text{mit} \qquad \epsilon := \frac{\gamma_0}{\omega}$$

Aufgrund dieser Vorgaben (Energiezufuhr für kleine θ und Reibung für große θ) ergibt sich ein stabiler *Grenzzyklus*, in den alle Trajektorien einmünden. Seine Form hängt stark vom Parameter ϵ ab. Für $\epsilon \approx 0$ ergibt das Phasenportrait *kreisförmige Trajektorien* (wie im Fall ohne Dämpfung). Berechnet man für diesen Fall, d.h. $\epsilon = 0_+$ die Amplitude ρ mit Hilfe des Ansatzes

$$\theta(t) \simeq \rho \sin t$$

ergibt sich, daß die Amplitude von der Wurzel des Parameters ϵ abhängt:

$$\rho \simeq 2\sqrt{\epsilon}$$

Dieses Resultat gilt generell für kleine Nichtlinearitäten.

Der parametrisierte Oszillator

S. B30ff.

Aussage: Der *ungedämpfte Oszillator* besitzt in linearer Näherung ($\sin\theta \approx \theta$) folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (\star)$$

wobei θ den Auslenkungswinkel, g die Erdbeschleunigung und l die Pendellänge bezeichne. Wir bewegen nun den Aufhängepunkt in vertikale Richtung oder - äquivalent dazu - verändern das Gravitationsfeld mit der Zeit:

$$g(t) = g_0 + \beta(t)$$

Eingesetzt in ($\star$) erhalten wir eine Gleichung, die *nichtintegrabel* ist, d.h. für beliebige $g(t)$ nicht unbedingt lösbar. Setzt man $g(t)$ periodisch an, so erhält man die *Hill-Gleichung*. Geht man weiter und fordert von $g(t)$, eine *Kreisfunktion* darzustellen, d.h.

$$g(t) = g_0 + g_1\cos(2\omega t)$$

erhält man die *Mathieu-Gleichung*:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\left[1 + h\cos(2\omega t)\right]\theta = 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0^2 := \frac{g_0}{l} \qquad \text{und} \qquad h := \frac{g_1}{g_0}$$

welche die folgenden Lösungen besitzt:

$$\theta(t) = e^{\mu t}\cdot P(t) \qquad \text{mit} \qquad P(t) = P\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)$$

Der Exponent μ heißt dabei *charakteristischer Exponent* und $P(t)$ kann i. allg. nicht durch die gängigen transzendenten Funktionen beschrieben werden; man definiert daher sogenannte *Mathieu-Funktionen*.

Bifurkationen

S. B38

Aussage: Ändert man den Parameter ϵ einer Gleichung und ergibt sich bei einem betimmten kritischen Wert ϵ_{krit} eine qualitative Veränderung der Lösung dieser Gleichung, so spricht man von einer *Bifurkation* (wörtl. „Gabelung") und ϵ_{krit} heißt *Bifurkations-Punkt*.

Hopf-Bifurkationen

S. B38ff.

Aussage: Ändert man den Parameters ϵ einer Gleichung und ergibt sich bei Überschreitung des Bifurkationspunkt ϵ_{krit} ein Grenzzyklus, so spricht man von einer *Hopf-Bifurkation*.

Superkritische Bifurkation

S. B40

Aussage: Eine Bifurkation heißt *superkritisch* oder *normal*, wenn am Bifurkationspunkt das System marginal stabil ist.

Subkritische Bifurkation

S. B40

Aussage: Eine Bifurkation heißt *subkritisch* oder *invers*, wenn am Bifurkationspunkt das System instabil ist, d.h. nichtlineare Effekte verstärken dort die Instabiblität.

Diskrete Fourier-Transformation

S. B44

Aussage: Die *Fourier-Transformierte* $\hat{x}_k$ der diskreten Variable x_j ist wie folgt definiert:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} x_j\ e^{-i\frac{2\pi kj}{n}}$$

und die Umkehrung (inverse Fourier-Transformation) ergibt:

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k\ e^{i\frac{2\pi jk}{n}}$$

Parseval-Plancherel-Gleichung

S. B45

Aussage: Die *Parseval-Plancherel-Gleichung* beschreibt die Erhaltung der *Hamiltonschen Länge*

$$\sum xx^* = \sum |x|^2$$

bei einer Fourier-Transformation:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2$$

Definition: Autokorrelations-Funktion

S. B46

Aussage: Die *Autokorrelations-Funktion* ψ_m ist wie folgt definiert:

$$\psi_m := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\ x_{j+m}$$

The Wiener-Khintchin-Theorem

S. B40ff.

Aussage: Mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation für x_j und x_{j+m}, sowie der Identität $\hat{x}^*_{k'} = \hat{x}_{n-k'}$ (Symmetrie des Leistungs-Spektrums) erhält man aus der Definition der Autokorrelationsfunktion

$$\psi_m := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \; x_{j+m}$$

die folgende Beziehung zwischen ψ_m und der Fourier-Transformierten $\hat{x}_k$:

$$\psi_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 \;\cos\left(\frac{2\pi m}{n} k\right)$$

Für man die Funktion

$$S_k := \sum_{m=1}^{n} \psi_m \;\cos\left(\frac{2\pi m}{n} k\right)$$

ein, so ergibt sich durch Einsetzen von ψ_m die umgekehrte Beziehung zwischen der Fourier-Transformierten und der Autokorrelationsfunktion:

$$|\hat{x}_k|^2 = \sum_{m=1}^{n} \psi_m \;\cos\left(\frac{2\pi m}{n} k\right)$$

die man *Wiener-Khintchin-Theorem* nennt.

Fourier-Spektrum einer periodischen Funktion

S. B60ff.

Aussage: Gegeben sei die *periodische Funktion* $x(t)$:

$$x(t) = x(t+T) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

Angenommen, die Periode T entspricht genau der Dauer t_{max} der Messung von n Meßwerten:

$$t_{max} = n \cdot \Delta t = T$$

Dann liegen die Fourierkomponenten bei den Frequenzen

$$\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \ldots, \frac{n}{T}$$

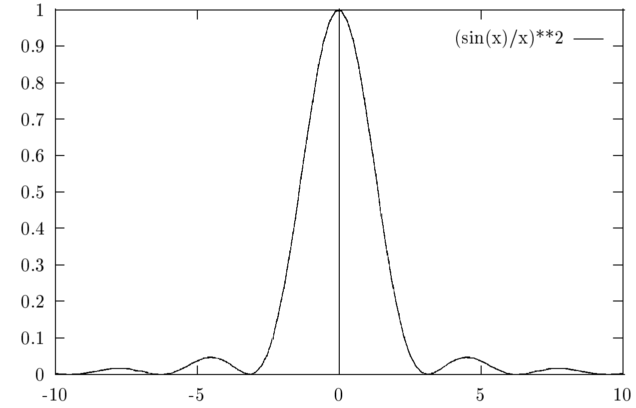
Ist $x(t)$ eine (Ko-)Sinus-Funktion sind alle Frequenzen außer $\frac{1}{T}$ gleich Null. Allgemein ergibt sich für große n für die Fourierkomponenten:

$$|\hat{x}_k|^2 = n \frac{\sin^2(n\pi\phi_k)}{(n\pi\phi_k)^2} \qquad \text{mit} \qquad \phi_k := \frac{t_{max}}{T} - k$$

D.h. es ergibt sich ein großes Maximum bei

$$k = \frac{n\Delta t}{T}$$

und äquidistante kleiner Maxima bei $\pm\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$ wie in der folgenden Abbildung:



Definition: Quasiperiodische Funktion

S. B54

Aussage: Sei y eine Funktion von r unabhängigen Variablen

$$t_1, t_2, \ldots, t_r$$

und sei y in jeder dieser Variablen periodisch mit Periode 2π, d.h.

$$y(t_1, t_2, \ldots, t_r) = y(t_1, t_2, \ldots, t_j + 2\pi, \ldots, t_r)$$

Dann heißt y *quasiperiodisch* in der Zeit, wenn alle r Variablen proportional zur Zeit t sind:

$$t_j = \omega_j t$$

Beispiel: Astronomische Position eines Punktes auf der Erdoberfläche (seine Bewegung ist zusammengesetzt aus der Rotation der Erde um ihre Achse, um die Sonne und der Präzession der Erdachse).

Fourier-Spektrum einer quasiperiodischen Funktion

S. B55ff.

Aussage: Das *Fourier-Spektrum einer quasiperiodischen Funktion*, welche nichtlinear von periodischen Funktionen der Variablen $\omega_i t$ abhängt, besteht aus Frequenzen der Form:

$$|m_1 f_1 + m_2 f_2 + \ldots + m_r f_r| \qquad \text{mit} \qquad m_i \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Spektrum einer aperiodischen Funktion

S. B58ff.

Aussage: Eine *aperiodische Funktion* $x(t)$ besitze einen Mittelwert von Null und eine Varianz $\overline{x^2}$. In Abwesenheit von Korrelationen zwischen den Werten zu verschiedenen Zeiten erhält man daher:

$$\langle x_j x_{j+m} \rangle = \overline{x^2}\delta_m = \langle \psi_m \rangle$$

Dann ergibt sich für das Fourier-Spektrum dieser Funktion mit Hilfe des Wiener-Khintchin-Theorems:

$$\left\langle |\hat{x}_k|^2 \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle \psi_m \rangle \, \cos\left(\frac{2\pi k}{n} m\right) = \overline{x^2}$$

d.h. die durchschnittliche Amplitude des Spektrums ist unabhängig von k und daher unabhängig von der Frequenz. Das Fourier-Spektrum einer aperiodischen Funktion stellt also *weißes Rauschen* dar.

Definition: Dynamisches System

S. B63

Aussage: Ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = F(\vec{X}, t) \qquad \text{mit} \qquad \vec{X} \in \mathbb{R}^n$$

heißt *Dynamisches System in* $\mathbb{R}^n$.

Definition: Autonomes Dynamisches System

S. B63

Aussage: Ein dynamisches System in $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = F(\vec{X}, t) \qquad \text{mit} \qquad \vec{X} \in \mathbb{R}^n$$

bei dem F nicht *explizit* von der Zeit abhängt, d.h.

$$F = F(\vec{X}(t))$$

heißt *autonomes dynamisches System*.

Poincaré-Schnitt

S. B64ff.

Aussage: Eine Methode, die Eigenschaften eines Flusses Γ zu untersuchen, stellt der *Poincaré-Schnitt* dar. Hierzu legt man eine Ebene S fest, die von den Trajektorien durchstoßen wird. Dabei untersucht man diejenigen Schnittpunkte, bei denen der Durchstoß immer in eine Richtung erfolgt, z.B. bei einer x-y-Ebene immer in Richtung der negativen z-Achse. Die Menge dieser Punkte bezeichnet man als *Poincaré-Schnitt* von Γ mit S.
Dann ist auf S eine Abbildung T von S nach S definiert, die einen Punkt auf den nächsten abbildet:

$$T(P_k) := P_{k+1}$$

Da man diese Operation auch umgekehrt definieren kann, ist T invertierbar.
Vorteile:

- die mathematische Behandlung der iterierten Abbildung T^n ist viel einfacher als die des Flusses.
- die Schittpunkte zeigen einfacher wesentliche Strukturen des Flusses auf

Poincaré-Schnitt bei periodischer Lösung und deren Stabilität

S. B67f.

Aussage: Bei einer periodischen Lösung ist die Trajektorie ein geschlossener Orbit und daher besteht der Poincaré-Schnitt aus einem Fixpunkt:

$$P_0 = T(P_0)$$

In diesem Fall läßt sich die Lösung immer in eine Fourier-Reihe entwickeln: Kennt man nämlich die Lösung zu einer bestimmten Zeit, so läßt sich der Zustand des System zu jeder späteren Zeit vorhersagen.

Die Poincaré-Abbildung T wird durch eine sogenannte *Floquet-Matrix* beschrieben, die wie folgt definiert ist:

$$M := \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{x_i^0} \qquad \text{mit} \qquad i = 1, 2$$

Für das m-te Bild eines Punktes, der um die infinitesimale Distanz δ von P_0 entfernt ist, ergibt sich damit:

$$T^m(P_0 + \delta) - P_0 \simeq M^m \delta \qquad \text{mit} \qquad \|\delta\| \to 0$$

Das bedeutet, daß der Fixpunkt P_0 genau dann stabil gegen infinitesimale Änderung ist, wenn alle Eigenwerte von M einen Betrag von weniger als 1 haben.

Poincaré-Schnitt bei quasiperiodischer Lösung und deren Stabilität

S. B67f.

Aussage: Bei einer von r Variablen abhängigen quasiperiodischen Lösung liegt die Trajektorie auf einem r-Torus, da sie als Superposition von r periodischen Lösungen zusammengesetzt gedacht werden kann. Für den Poincaré-Schnitt ergeben sich zwei Möglichkeiten (Betrachtung einer biperiodischen Lösung mit Frequenzen f_1 und f_2):

1. das Verhältnis f_1/f_2 ist irrational:
   der Poincaré-Schnitt besteht aus einer geschlossenen Kurve C, die invariant unter der Poincaré-Abbildung T ist:
   $$T(C) = C$$
2. das Verhältnis $f_1/f_2 = n_1/n_2$ ist rational:
   die Trajektorie schließt nach $T = n_1/f_1 = n_2/f_2$ Rotationen und der Poincaré-Schnitt besteht aus n_1 Punkten für die gilt:
   $$P_i = T^{n_1}(P_i)$$

Poincaré-Schnitt bei aperiodischer Lösung

S. B70

Aussage: Bei der Untersuchung des *Poincaré-Schnitts einer aperiodischen Lösung* ist das Verständnis *seltsamer Attraktoren* wichtig. Im allgemeinen untersucht man die Eigenschaften der sogenannten *Ersten-Rückkehr-Abbildung*

$$f(x_k) := x_{k+1}$$

Untersuchung einer Ersten-Rückkehr-Abbildung

S. B71ff.

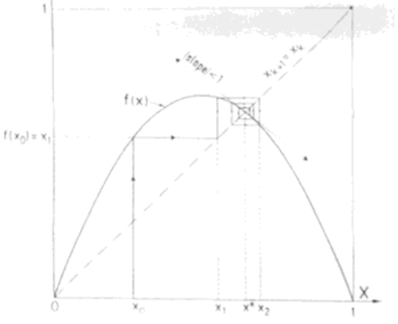
Aussage: Untersuchen wir als Beispiel einer *Ersten-Rückkehr-Abbildung* $f(x_k) := x_{k+1}$ die logistische Gleichung

$$x_{k+1} = 4\mu x_k\,(1 - x_k)$$

Wir suchen Fixpunkte, d.h. Punkte für die gilt:

$$x_{k+1} = x_k$$

Sie lassen sich nach der in der Abbildung gezeigten Methode finden:



Seltsame Attraktoren

S. B103ff.

Aussage: Im Jahre 1944 versuchte *Landau* den Übergang ins Chaos dadurch zu erklären, daß durch Veränderung eines Parameters, das System zuerst periodisch wird mit Frequenz f_1, dann quasiperiodisch durch Auftreten einer von f_1 unabhängigen Frequenz f_2 und immer mehr Frequenzen auftreten, so daß das Fourier-Spektrum schließlich kontinuierlich aussieht, weil es aus r Frequenzen eines Attraktors in Form eines r-Torus aufgebaut ist. Daß diese These falsch ist, haben *Ruelle* und *Takens* im Jahre 1971 gezeigt: Auch Systeme mit niedrigen Freiheitsgraden (r muß ja kleiner als die Zahl der Freiheitsgrade des Systems sein) können chaotisch sein. Sie führten im Gegensatz dazu das chaotische Verhalten von Systemen auf sogenannten *seltsame Attraktoren* zurück, die die Eigenschaft der *sensitivity to initial conditions* (S.I.C.) besitzen, d.h. anfänglich sehr nahe Trajektorien können sich exponentiell mit der Zeit von einander entfernen. Daher die Eigenschaft chaotischer Systeme, auf längere Sicht nicht vorhersagbar zu sein, da man die Anfangsbedingungen nie exakt kennt.

Floquet-Theorie

S. B106ff.

Aussage: Gegeben sei ein nichtlineares, autonomes und periodisches dynamisches System mit Periode T:

$$\vec{X}(t+T) = \vec{X}(t)$$

Um die *Stabilität der periodischen Lösung* zu überprüfen betrachten wir eine zur Trajektorie *senkrechte* infinitessimale Störung $\delta\vec{X}$. Nach n Perioden ergibt sich

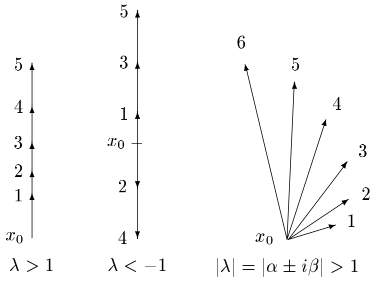
$$\vec{X}_0 + M^n \delta\vec{X}$$

wobei M die *Floquet-Matix* darstellt. Ihre Eigenwerte bestimmten daher die Stabilität des Grenzzyklus:

1. alle Eigenwerte ≤ 1: Grenzzyklus stabil
2. mindestens ein Eigenwert > 1: Grenzzyklus instabil
   ⇒ Übergang ins Chaos

Der Übergang ins Chaos kann sich auf drei Arten abspielen. Sei D der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Verändert man nun den (die) Parameter μ des Flusses und wandert dabei mindestens ein Eigenwert aus D heraus, entscheidet der Ort des Durchgangs durch D die Art des Weges ins Chaos:

Übergang	**Bifurkation**	**Phänomen**
bei $+1$:	Sattel-Knoten	Intermittenz Typ I
bei -1:	$\left.\begin{array}{c}\text{normale}\\ \text{inverse}\end{array}\right\}$ subharmonische	subharmonische Kaskade Intermittenz Typ III
bei $(\alpha \pm i\beta)$:	$\left.\begin{array}{c}\text{normale}\\ \text{inverse}\end{array}\right\}$ Hopf-Bifurkation	Quasiperiodizität Intermittenz Typ II



Trajektorien auf einem 2-Torus

S. B114f.

Aussage: Trajektorien eines deterministischen dynamischen Systems können sich nicht schneiden, da das System dann nicht mehr determiniert wäre. Die *Trajektorien auf einem 2-Torus* müssen daher parallel zueinander sein, da sie sich sonst schneiden würden, wie man sieht wenn man die Oberfläche des 2-Torus entfaltet: es entsteht eine rechteckige Fläche. Es gibt nun zwei Möglichkeiten (ω_1 und ω_2 sind die beiden Frequenzen, die den 2-Torus bilden):

1. das Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ist *irrational*: die Trajektorien bedecken die Torus-Oberfläche *dicht*
   ⇒ quasiperiodisches System
2. das Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ist *rational*: die Trajektorie ist *geschlossen*
   ⇒ periodisches System

Dimension eines Attraktors (obere Grenze)

S. B114

Aussage: Die Dimension d eines Attraktors in einem n-dimensionalen Phasen-Raum ist stehts kleiner als n:

$$d < n$$

Das läßt sich wie folgt verstehen: Besteht der Attraktor beispielsweise aus einem Grenzzyklus, so reicht eine Koordinate um die Position auf der Kurve anzugeben. Entsprechend für höhere Dimensionen.

Berechnung der Volumenkontraktion

S. B114

Aussage: In dissipativen dynamischen Systemen kontrahiert das Phasenraumvolumen des Systems mit der Zeit. Die relative Änderung des Volumes V unter der Wirkung eines Flusses berechnet sich mit Hilfe der *Lie-Ableitung*

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i}$$

wobei X_i die i-te Komponente von $\vec{X} \in \mathbb{R}$ darstellt.

Definition: Autokorrelationsfunktion

S. B117f.

Aussage: Die *Autokorrelations-Funktion* ist wie folgt definiert:

$$C(\tau) := \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} X(t) \cdot X(t+\tau)\; dt$$

Sie gibt den Nachhall von $X(t)$ zu einem späteren Zeitpunkt $t+\tau$ an und ist dem Wiener-Khintchine-Theorem zufolge die Fourier-Transformierte des Leistungs-Spektrums.

1. $X(t)$ (quasi-)periodisch: $C(\tau) > 0$ für $\tau \to \infty$
2. $X(t)$ aperiodisch: $C(\tau) = 0$ für $\tau \to \infty$

Eigenschaften aperiodischer Attraktoren

S. B119ff.

Aussage: *Aperiodische* oder *seltsame Attraktoren* haben folgende Eigenschaften:

1. ziehen Trajektorien an
2. anfänglich nahe beieinanderliegende Trajektoren divergieren (*sensitivity to initial conditions*)
3. fraktale Dimension

Seltsame Attraktoren werden durch *Hyperbolizität* konstruiert, d.h. durch eine Iteration von

1. *Streckung* (Divergenz anfänglich nahe beieinanderliegender Trajektoren)
2. *Faltung* (Trajektorien bleiben in einem begrenzten Raum)

Das Lorenz-Modell

S. B123/B301ff./S10f.

Aussage: Das *Lorenz-Modell* stellt eine vereinfachende Beschreibung eines *Rayleigh-Bénard*-Systems dar. Die Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mathrm{Pr}\,(Y - X)\\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y\\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}$$

Die Form der Ersten-Rückkehr-Abbildung beschreibt ein umgekehrtes V. Vergrößert man den Parameter r, so ist ab einem bestimmten Wert die Steigen beider Flanken größer 1, das System besitzt keinen Fixpunkt mehr und wird chaotisch.
Der Lorenz-Attraktor besitzt eine sehr starke Volumenkontraktionsrate von etwa 10^{-6} pro Zeitintervall für einen Poincaré-Schnitt. Im Gegensatz dazu hat der Hénon-Attraktor nur eine Kontraktionsrate von etwa 0.3.

Hausdorff-Besikowitsch-Dimension

S. B146ff.

Aussage: Um die *Hausdorff-Besikowitsch-Dimension* D einer Menge von Punkten zu bestimmen, versucht man die Punkte mit (Hyper-)Kuben der linearen Dimension ϵ zu überdecken. Sei $N(\epsilon)$ die kleinste dazu nötige Anzahl, dann bestimmt sich D wie folgt:

$$D := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

Beispiel: Linienstück der Länge $L \Rightarrow N(\epsilon) = L\epsilon^{-1} \Rightarrow D = 1$.

Hausdorff-Dimension einer Cantor-Menge

S. B148f.

Aussage: Eine *Cantor-Menge* konstruiert man, indem man von einer Strecke das mittlere Drittel wegnimmt. Von den beiden sich dadurch ergebenden Strecken nimmt man wieder das mittlere Drittel weg usw. Die *Hausdorff-Dimension* bestimmt sich nun wie folgt: Man braucht $N(\epsilon) = 2$ Strecken der Länge $\epsilon = \frac{1}{3}$ um die Menge nach dem ersten Schritt abzudecken, $N(\epsilon) = 4$ Strecken der Länge $\epsilon = \frac{1}{9}$ nach dem 2. Schritt usw., d.h.

$$D = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \simeq 0.63$$

Korrelations-Dimension

S. B149f.

Aussage: Die Hausdorff-Dimension D einer Menge konvergiert oft nicht schnell genug. Schneller konvergiert die sogenannte *Korrelations-Dimension* ν, die wie folgt definiert ist:

$$N(r) \sim r^{\nu}$$

wobei $N(r)$ die Anzahl der Punkte innerhalb einer Kugel vom Radius r ist.
Beispiele:

1. Kurve (alle Punkte gleich verteilt) $\Rightarrow N(r) \sim r \Rightarrow \nu = 1$
2. Fläche (alle Punkte gleich verteilt) $\Rightarrow N(r) \sim r^2 \Rightarrow \nu = 2$
3. Cantor-Menge: $N(r) \sim r^{0.63} \Rightarrow \nu = 0.63 = D$

Im allgemeinen gilt:

$$\nu \leq D$$

Geometrische Charakterisierung von Attraktoren

S. B150ff.

Aussage: Auf einem seltsamen Attraktor sind aufgrund der *Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungn* zwei Punkte auf der selben Trajektorie, die aber in der Zeit weit weg sind *unkorreliert*. Da aber alle Punkte auf dem Attraktor liegen, gibt es *räumliche Korrelation*, welche durch die folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$C(r) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{k,j=1}^{m} H(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \qquad \text{mit} \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$H(x)$ heißt dabei *Heavisidesche Funktion*. Die Anzahl der Paare i, j innerhalb von r entspricht der Anzahl $N(r)$ der Korrelationsdimension ν, es werden allerdings die Kugeln aller Punkte auf den Trajektorien des Attraktors aufsummiert. $C(r)$ ist daher proportional zu $N(r)$:

$$C(r) \sim r^{\nu}$$

Der Hufeisen-Attraktor

S. B155ff.

Aussage: Der *Hufeisen-Attraktor* zeigt alle Eigenschaften eines *seltsamen Attraktor* sehr deutlich. Man nehme ein Rechteck $ABCD$, strecke es in eine Richtung um den Faktor 2 und stauche es in die andere um einen Faktor 2η (mit $\eta > 1$), so daß man einen Streifen erhält (s.Abb. S. B156f.). Diesen biege man in Hufeisenform (1. Iteration). Das Hufeisen paßt in das ursprüngliche Rechteck $ABCD$, da die Stauchung stärker erfolgte als die Streckung (Volumenkontraktion). Nun wiederhole man den Vorgang mit dem in das Rechteck $ABCD$ eingepaßten Hufeisen usw. Der Attraktor hat dann folgende Eigenschaften:

1. Selbstähnlichkeit: sieht von Ferne und in Ausschnitten wie ein Hufeisen aus
2. Schnitt senkrecht zu den beiden Enden des Hufeisens zeigt eine Iterations ähnlich der Cantor-Menge, allerdings mit der Dimension

   $$D' = \frac{\ln 2}{\ln 2\eta}$$

   Nimmt man die dazu senkrechte Dimension mit ergibt sich

   $$D = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2\eta}$$

3. Hyperbolizität: Streckung und Faltung (hier das Biegen)
4. Liapunow-Koeffizienten: $\Lambda_1 = 2$ und $\Lambda_2 = \frac{1}{2\eta}$ mit den Liapunow-Exponenten $\lambda_1 = \ln \Lambda_1$ und $\lambda_2 = \ln \Lambda_2$
5. Flächenkontraktionsrate: $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \frac{1}{\eta}$

Wege ins Chaos über Quasiperiodizität

S. B159ff.

Aussage: Es gibt zwei Wege über Quasiperiodizität ins Chaos:

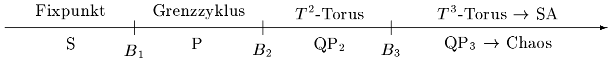
1. Ruelle-Takens-Theorie: hier geht das System über einen T^2-Torus in einen T^3-Torus, der wiederum in Chaos übergeht
2. Curry-Yorke-Modell: hier geht das System über einen T^2-Torus durch Einführung eines neuen Freiheitsgrades *direkt* ins Chaos über

Beide Wege können z.B. im Rayleigh-Bénard-Experiment beobachtet werden.

Ruelle-Takens-Theorie

S. B161ff.

Aussage: Die *Ruelle-Takens-Theorie* zeigte in den 70er Jahren, daß im Gegensatz zu der These von Landau, Chaos entstehe durch eine sehr große (unendlich) Anzahl von Bifurkationen, drei Hopf-Birfurkationen ausreichen, um Chaos zu erzeugen:

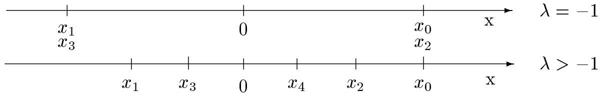


Die erste Hopf-Bifurkation B_1 führt das stationäre System S mit einem Fixpunkt in ein periodisches System P über, welches einen Grenzzyklus besitzt. Die zweite Bifurkation B_2 führt dieses in ein quasiperiodisches System QP_2 mit zwei Frequenzen über, das einen T^2-Torus als Attraktor besitzt. Da das System determiniert ist und sich daher die Trajektorien auf dem T^2-Torus nicht schneiden dürfen, kann hier kein Chaos auftreten. Die dritte Hopf-Bifurkation B_3 schließlich führt, wenn sie superkritisch ist, in ein quasiperiodisches System QP_3 mit drei Frequenzen über, welches einen T^3-Torus als Attraktor besitzt. Da die Entfaltung eines T^3-Torus aber ein Quader und nicht wie beim T^2-Torus eine Fläche ist, können die Trajektorien nicht parallel sein ohne sich zu schneiden, daher kann das System ins Chaos übergehen.

Die Methode der Perioden-Verdopplung

S. 191ff.

Aussage: Wenn der Eigenwert λ der Floquet-Matrix sich dem Wert -1 nähert kommt es zur *Perioden-Verdopplung*:



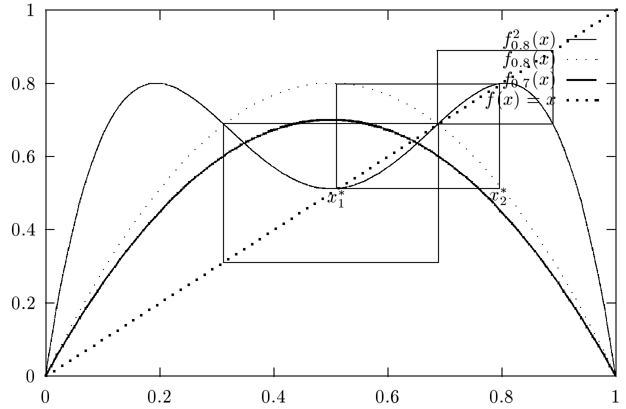
Ist der Eigenwert noch größer als -1, so werden Störungen wieder auf den Fixpunkt (Grenzzyklus etc.) zurückgeworfen, wie im Bild unten zu sehen. Erreicht der Eigenwert den Wert -1 so oszilliert das System zwischen der Störung x_0 dem am Fixpunkt gespiegelten Punkt x_1 hin- und her, wie man oben im Bild sieht. Das System kehrt also mit einer doppelt so großen Periode zu x_0 zurück. Daher spricht man von *Perioden-Verdopplung*.

Perioden-Verdopplung bei der logistischen Abbildung

S. B195ff.

Aussage: Die *logistische Gleichung* hat die folgende Form:

$$x_{k+1} = f_\mu(x_k) = 4\mu\, x_k(1 - x_k) \qquad \text{mit} \qquad x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f_\mu(x) \in [0,1]$$



Nichtchaotischer Bereich ($\mu < 0.75$):
Die Abbildung zeigt u.a. den Graphen von $f_{0.7}(x)$, d.h. $\mu = 0.7$. Hier gibt es drei Fixpunkte:

- der Schnittpunkt mit der Geraden $f(x) = x$ ist *stabil*, da $|f'_\mu(x)| < 1$ an diesem Punkt
- die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ sind *instabil*, da eine kleine Störung zum erstgenannten Fixpunkt führt

Chaotischer Bereich ($\mu > 0.75$):
Die Funktion $f_{0.8}(x)$ hat keinen Fixpunkt mehr beim Schnittpunkt mit $f(x) = x$, aber zwei neue Fixpunkte x_1^* und x_2^*. Der Kasten (eigentlich ein Quadrat) bei x_1^* und x_2^* zeigt folgende Beziehung:

$$x_2^* = f_\mu(x_1^*) \qquad \text{und} \qquad x_1^* = f_\mu(x_2^*)$$

Die Lösung alterniert also zwischen x_1^* und x_2^* und stellt einen *2-Zyklus* dar. Wegen

$$x_2^* = f_\mu(x_1^*) = f_\mu(f_\mu(x_2^*)) \qquad \text{und} \qquad x_1^* = f_\mu(x_2^*) = f_\mu(f_\mu(x_1^*))$$

sind x_1^* und x_2^* Fixpunkte der Funktion $f_\mu^2(x) := f_\mu(f_\mu(x))$ wie auch aus der Abbildung ersichtlich. Betrachtet man die beiden Kästen um x_1^* und x_2^*, so ergibt sich die Ausgangssituation zweimal im kleinen. Daher ergeben sich bei weiterer Erhöhung des Parameters μ aus diesen beiden Fixpunkten von $f_\mu^2(x)$, wenn die Ableitung $|f_\mu^2(x)'| > 1$ wird, vier neue Fixpunkte jeweils rechts und links von x_1^* und x_2^*, die Fixpunkte von $f_\mu^4(x) := f_\mu(f_\mu(f_\mu(f_\mu(x))))$ darstellen. Die Lösung alterniert zwischen ihnen und ist daher ein *4-Zyklus*. Wiederholt man diese Prozedur immer wieder verdoppelt sich jeweils die Periode.

Skalierungsgesetze bei der subharmonischen Kaskade

S. S39ff./B200ff.

Aussage: Erhöht man bei der logistische Gleichung

$$x_{k+1} = f_\mu(x_k) = 4\mu\, x_k(1 - x_k)$$

den Parameter μ immer weiter so ergeben sich ab $\mu = 0.75$ nacheinander für $l = 0, 1, \ldots, \infty$ jeweils ein 2^l-Zyklus. Die entstehende subharmonische Kaskade läuft auf

$$\mu_\infty = 0.892\,486\,418\ldots$$

zu, dem Punkt mit $l = \infty$. Der Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden μ-Werten, bei denen Bifurkationen auftreten, wird dabei jeweils um einen *konstanten Feigenbaum-Faktor* δ reduziert:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta = 4.669\,201\,609\,102\ldots$$

Neben dieser Skalierung der Parameter-Achse gibt es auch eine Skalierung der x_k-Achse: Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten auf dem Attraktor wird jeweils um einen konstanten *Feigenbaum-Faktor* α reduziert:

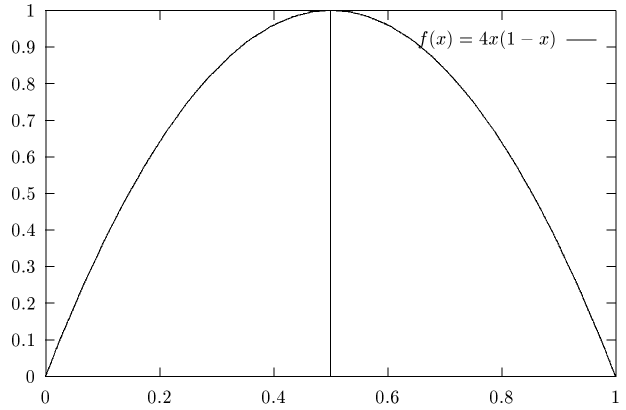
$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha = 2.502\,907\,875\ldots$$

Dabei lassen sich μ_∞, δ und α nur numerisch berechnen. Die Feigenbaum-Konstanten δ und α sind *universal* und bestimmen die Skalierung nicht nur bei der logistischen Gleichung.

Fundamentale Eigenschaften beim Übergang ins Chaos durch eine subharmonische Kaskade

S. B202ff.

Aussage: Die beiden fundamentalen Eigenschaften einer Abbildung beim Übergang ins Chaos durch eine subharmonische Kaskade zeigen wir am Beispiel der logistischen Gleichung:



Sowohl das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ als auch $[\frac{1}{2}, 1]$ wird auf das Intervall $[0, 1]$ abgebildet

1. Streckung: beide Intervalle werden gestreckt
   ⇒ Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen: eine anfängliche Abweichung δx_0 vergrößert sich exponentiell:

   $$\delta x_k = \delta x_0 e^{\lambda k}$$

   wobei λ der Liapunow-Exponent ist.
2. Faltung: wandert man auf der x-Achse von 0 nach 1, so wandert $f(x)$ von 0 nach 1 und wieder zurück
   ⇒ Beschränkung auf einen begrenzten Bereich

Universelle Abfolge bei einer subharmonischen Kaskade

S. B208ff.

Aussage: Der chaotische Bereich, der auf eine subharmonische Kaskade folgt, wird bei Erhöhung des Parameters immer wieder durch *Periodizitäts-Fenster* unterbrochen: Zuerst tritt ein p-Zyklus ($p > 1$) auf, der dann in eine Kaskade der Perioden $p \cdot 2^l$ mit $l = 1, 2, \ldots, \infty$ übergeht, die den üblichen δ- und α-Skalierungen genügt. Dabei gilt:

- absolute Lage und Breite des Fensters sind abhängig von der verwendeten Abbildung
- die Reihenfolge, in der die Fenster auftreten ist *universal* („*universelle Abfolge*“), d.h. z.B. $p = 6, 5, 3, 6, 5, \ldots$ für Perioden ≤ 6.

Definition: Intermittenz

S. B223ff.

Aussage: Als *Intermittenz* („Aussetzen“, „Unterbrechen“) bezeichnet man das Phänomen, daß das oszillatorische Verhalten eines Systems immer wieder von *Schüben unregelmäßigen und chaotischen Verhaltens* unterbrochen wird. Intermittenz tritt z.B. auf, wenn man eine Platte in einen sehr starken Fluß parallel zu dessen Richtung einführt. Es bildet sich eine Grenzschicht, die zu unregelmäßigen Zeiten stark verschoben wird.

Analyse der verschiedenen Arten von Intermittenz

S. B225ff.

Aussage: Die *Analyse der verschiedenen Arten von Intermittenz* erfolgt grundsätzlich in folgenden Schritten

1. man betrachtet den *Übergang des Eigenvektors* der Floquet-Matrix durch deren Einheitskreis
2. dazu entwickelt man eine eindimensionale Abbildung, die den Übergang beschreibt, in eine *Taylorreihe* mit einem *Kontrollparameter* ϵ
3. dann ersetzt man in der Abbildung $x_{n+1} - x_n$ durch $\frac{dx}{dk}$, wandelt also die Differenz-Gleichung in eine Differentialgleichung um

Intermittenz vom Typ I

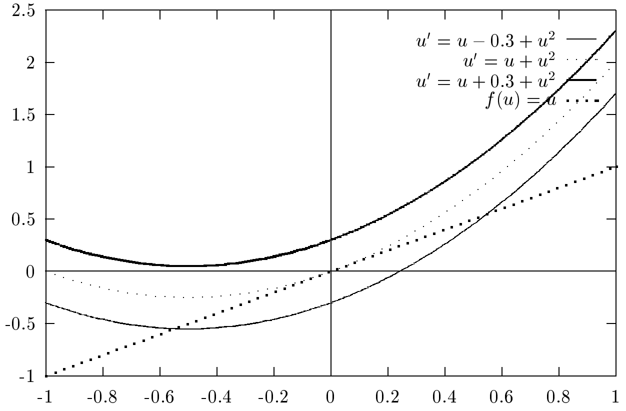
S. B225ff.

Aussage: Eine *Intermittenz vom Typ I* tritt auf, wenn der Eigenwert der Floquet-Matrix den Einheitskreis bei +1 überschreitet. Wir definieren eine Koordinate u in der Poincaré-Schnittebene, die in Richtung des Eigenvektors der Floquet-Matrix zeigt. Dann gilt

$$u \to u' = \lambda(r)\ u \qquad \text{mit} \qquad \lambda(r_i) = +1$$

wobei r den Kontrollparameter und r_i seinen Wert auf dem Einheitskreis bezeichnet. Nun entwickelt man die Abbildung in eine *Taylorreihe*

$$u' = u + \epsilon + u^2$$



1. $\underline{\epsilon < 0}$: Noch innerhalb des Einheitskreises
   → zwei Fixpunkte (der untere ist stabil, der obere instabil)
2. $\underline{\epsilon = 0}$: auf dem Einheitskreis
   → ein doppelter Fixpunkt: marginal stabil (nach unten stabil, nach oben instabil)
3. $\underline{\epsilon > 0}$: außerhalb des Einheitskreises
   → kein Fixpunkt, Iterationen, die bei $u < 0$ beginnen, streben nach oben und bleiben dabei lange Zeit im engen Kanal zwischen u' und $f(u) = u$
   Man ersetzt nun $u' - u$ durch $\frac{d^2u}{dk^2}$, wobei k die Anzahl der Iterationen angibt, die man benötigt, um durch den Kanal zu kommen. Aus der Differenzen- wird eine Differential-Gleichung:

   $$\frac{d^2u}{dk^2} = \epsilon + u^2$$

   Kann man nun durch einen Mechanismus die Lösung, wenn sie oben ankommt wieder nach unten bringen (Relaminarisation, Reinjektion), oszilliert sie jeweils lange Zeit im Kanal um dann Auszubrechen, wird durch Relaminarisation wieder zum oszillieren gebracht usw. Dies beschreibt das Verhalten einer Intermittenz.

Möglichkeiten der Relaminarisation (Reinjektion) bei einer Intermittenz vom Typ I

S. 231ff.

Aussage: Es gibt *drei Möglichkeiten der Relaminarisation (Reinjektion) bei einer Intermittenz vom Typ I*:

1. Relaminarisation auf einem T^2-Torus:
   Die „Erste-Rückkehr-Abbilung“ eines Flusses ist hier ein Kreis
   → entfaltet man die Torus-Oberfläche zu einem Rechteck, so sieht man wie die Iterationen nach Durchgang durch den Kanal wieder zum dessen Anfang zurückgeworfen werden (s.Abb. S. B233)
2. Relaminarisation durch eine Baker-Transformation:
   mit Hilfe der Verschiebungs-Abbildung $x \to \{2x\}$ ($\{2x\}$ ist der Bruchteil von $2x$, z.B. $\{2 \cdot \frac{3}{5}\} = \frac{1}{5}$). Da jeder Punkt zwei Vorgänger x_0, x_1 hat mit

   $$0 \le x_0 \le \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x_1 = x_0 + \frac{1}{2},$$

   nimmt man eine Variable y hinzu, die angibt, ob der Vorgänger größer oder kleiner $\frac{1}{2}$ ist. Auch diese Abbildung bewirkt Relaminarisation.
3. Relaminarisation durch einen Smale-Attraktor:
   Ausgangspunkt ist eine Abbildung wie die Verschiebungsabbildung, die durch Hinzufügen einer weiteren Abbildung, welche Gebiete kontrahiert, invertierbar gemacht wird. Auch diese Abbildung bewirkt Relaminarisation.

Intermittenz vom Typ III

S. B247ff.

Aussage: Eine *Intermittenz vom Typ III* tritt auf, wenn der Eigenwert der Floquet-Matrix den Einheitskreis bei -1 überschreitet und dabei eine *subkritische* subharmonische Bifurkation auftritt. Wir entwickeln die Erste-Rückkehr-Abbildung in eine *Taylorreihe* und erhalten

$$x \to x' = 1 - (1+\epsilon)x + \alpha x^2 + \beta' x^3$$

Betrachtet man nun die zweite Iteration x'', so ergibt sich nach Umformungen

$$x'' = x\ \Big((1+2\epsilon) + \beta x^2\Big)$$

Für *negatives* β ergibt sich eine *superkritische Bifurkation mit Periodenverdopplung*. *Positives* β verstärkt die Instabilität, weshalb man so eine *subkritische Bifurkation* erhält. Ersetzt man in letzterem Fall $x'' - x$ durch $\frac{dx}{dk}$ ergibt sich

$$\frac{dx}{dk} = x\ (1 + x^2)$$

Relaminarisation kann wie bei Typ I durch eine Baker-Transformation oder einen Smale-Attraktor vor sich gehen, nicht jedoch durch einen T^2-Torus.

Intermittenz vom Typ II

S. B259ff.

Aussage: Eine *Intermittenz vom Typ II* tritt auf, wenn der Eigenwert der Floquet-Matrix den Einheitskreis bei $(\alpha \pm i\beta)$ überschreitet und dabei eine *subkritische* Hopf-Bifurkation auftritt. Wir definieren ein komplexe Zahl

$$z = x + iy$$

so, daß die Erste-Rückkehr-Abbildung in linearer Näherung auf z wie eine Multiplikation mit $\lambda e^{i\phi}$ wirkt

$$z \to z' = \lambda e^{i\phi} z \qquad \text{mit} \qquad \lambda = 1 + \epsilon$$

Entwickelt man nun die Abbildung in eine *Taylorentwicklung* nach z und z^* erhält man nach einigem Rechnen

$$\rho \to \rho' = (1 + \epsilon)\, \rho + \rho^3$$

wobei ρ den Mittelwert der Entwicklung nach $|z|$ bezeichnet.