Lernkartei Elementare Feldtheorie

(`http://www.uni-karlsruhe.de/~um3f/TeX/physik.html`)

von Christof Degenhart

nach der „*Elementaren Feldtheorie*“
von H. Römer, M. Forger

(erschienen in der VCH Verlagsgesellschaft)

Inhaltsverzeichnis

1 Der Begriff des Feldes und seine Entstehung (FE)

(FE) Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen durch Feldtheorien
S. 10

Aussage: Die elektromagnetische und die gravitative Wechselwirkung haben unendliche Reichweite und können daher durch *klassische* Feldtheorien beschrieben werden. Im Gegensatz dazu ist die Reichweite der starken und der schwachen Wechselwirkung recht klein, so daß nur eine Beschreibung im Rahmen *quantisierter* Feldtheorien sinnvoll ist.

(FE) *Definition:* Feld
S. 12f.

Aussage: Idee: Dem *Feldbegriff* entspricht die Vorstellung, daß jeder Punkt des Raumes zum Träger zusätzlicher Qualitäten wie Druck, Temperatur, Strömungsgeschwindigkeit, elektrischer oder magnetischer Feldstärke wird.
Formale Definition: Ein *Feld* ist eine Abbildung A des Raumes (bzw. der Raum-Zeit) in die Menge F der möglichen Werte des Feldes:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R} \times E^3 &\to F, \\ \text{mit} \quad (t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E^3 &\to A(t, \vec{x}) \in F \end{aligned}$$

Beispiele:

- Skalarfelder: Druck-, Temperatur-, Dichtefelder
- Vektorfelder: Strömungs-, elektrische und magnetische Felder

(FE) Vektorfelder unter räumlichen Drehungen
S. 13

Aussage: Eine räumliche Drehung R führt das Vektorfeld $\vec{A}$ in eine neue Feldabbildung $\vec{A}^R$ über:

$$\vec{A}^R(\vec{x}) = R\,\vec{A}\,(R^{-1}\vec{x})$$

bzw.

$$\vec{A}^R = R \circ \vec{A} \circ R^{-1}$$

Ausgedrückt in einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E^3 & \xrightarrow{\vec{A}} & V^3 \\ R\downarrow & & \downarrow R \\ E^3 & \xrightarrow{\vec{A}} & V^3 \end{array}$$

(FE) Vektorfelder unter Translationen

S. 13f.

Aussage: Eine Translation T um einen Vektor $\vec{a}$ führt ein Vektorfeld $\vec{A}$ nicht in eine neue Feldabbildung über, sondern ordnet dem verschobenen Raumpunkt $\vec{x}+\vec{a}$ den alten Feldwert zu:

$$\vec{A}^{T(\vec{a})}(\vec{x}+\vec{a}) = \vec{A}(\vec{x})$$

bzw.

$$\vec{A}^{T(\vec{a})} = \vec{A} \circ T^{-1}(\vec{a})$$

2 Elemente der Hydrodynamik (HD)

(HD) *Definition:* Stromlinien

S. 15

Aussage: Unter *Stromlinien* versteht man Kurven $\vec{x}(\tau)$, deren Tangente in jedem Punkt durch den dortigen Wert des Strömungsfeldes gegeben ist:

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau}(\tau) = \vec{v}\,(t, \vec{x}(\tau))$$

Im Falle allgemeiner Vektorfelder spricht man von *Feldlinien.*

(HD) Gesetz von der Erhaltung der Masse

S. 15

Aussage: Sei $\rho(t,\vec{x})$ die Massendichte und $\vec{j}(t,\vec{x}) := \rho\vec{v}$ die Massenstromdichte eines strömenden Fluids. Dann fließt in der Zeit $\Delta t := t_2 - t_1$ durch die Fläche F die Masse:

$$m_F(t_2,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_F d\vec{f}\cdot\vec{j}(t,\vec{x})$$

Sei nun V ein Volumen ohne Quellen oder Senken, dann gilt:

$$\frac{dm_V}{dt}(t) = \int_V d^3x \frac{\partial\rho}{\partial t}(t,\vec{x}) = -\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = -\int_V d^3x(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})(t,\vec{x})$$

wobei im letzten Schritt der Gaußsche Satz verwendet wurde. Da V beliebig war, folgt daraus das *Gesetz von der Erhaltung der Masse*, eine Bilanz- oder Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

(HD) *Definition:* Extensive Größe

S. 16

Aussage: *Extensiv* oder *mengenartig* heißen physikalische Größen, die bei Verdopplung des physikalischen Systems verdoppeln.
Beispiele: Ladung, Teilchenzahl, Masse, Impuls, Entropie, usw.
Gegenbeispiele: Temperatur, Druck, usw.

(HD) *Definition:* Bilanz- oder Kontinuitätsgleichung

S. 16f.

Aussage: Unter einer *Bilanz- oder Kontinuitätsgleichung* für eine extensive Größe a versteht man eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial\rho^a}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}^a = q^a$$

wobei ρ^a die Dichte, $\vec{j}^a$ die Stromdichte und q^a die Quelldichte der Größe a bezeichnet. Im Fall $q^a = 0$ spricht man von einem *Erhaltungssatz.*

(HD) Transport einer extensiven Größe

S. 17

Aussage: Der *Transport einer extensiven Größe* a kann auf zweierlei Weise zustandekommen:

1. *Konvektion:* (Mitführung mit der Strömung)

$$\vec{j}^a_{\text{konv}} = \rho^a\vec{v}$$

2. *Konduktion:* (Leitung)
   → $\vec{j}^a_{\text{kond}}$ kann auch bei $\vec{v}\equiv 0$ und $\rho^a \equiv 0$ vorhanden sein

Die gesamte Stromdichte ergibt sich aus:

$$\vec{j}^a = \vec{j}^a_{\text{konv}} + \vec{j}^a_{\text{kond}}$$

(HD) Kontinuitätsgleichung für den Impuls

S. 18

Aussage: Sei $\rho^P_i(t,\vec{x})$ die Dichte der i-ten Impulskomponente, $j^P_{ik}(t,\vec{x})$ die k-Komponente der Stromdichte der i-ten Impulskomponente (Tensorfeld zweiter Stufe) und $\vec{f}(t,\vec{x})$ die Kraftedichte, die die Quelldichte für den Impuls darstellt. Dann ergibt sich als *Kontinuitätsgleichung für den Impuls:*

$$\frac{\partial\rho^P_i}{\partial t} + \nabla_k j^P_{ik} = f_i$$

mit $\rho^P_i = \rho v_i$ läßt sich der Stromdichtetensor schreiben als

$$j^P_{ik} = \rho\, v_i v_k + \sigma_{ik}$$

wobei σ den *konduktiven Anteil* der Impulsstromdichte darstellt, auch *Drucktensor* genannt.

(HD) Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls

S. 18f.

Aussage: Sei $\rho_i^L(t,\vec{x})$ die Dichte der i-ten Drehimpulskomponente, $j_{ik}^L(t,\vec{x})$ die k-Komponente der Stromdichte der i-ten Drehimpulskomponente (Tensorfeld zweiter Stufe) und $\vec{d}(t,\vec{x})$ die Drehmomentdichte, die die Quelldichte für den Drehimpuls darstellt. Dann ergibt sich als *Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls:*

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} + \nabla_k j_{ik}^L = d_i$$

(HD) Eigenschaften der Impulsstromdichte

S. 19

Aussage: Für normal strömende Fluide sind folgende Annahmen berechtigt:

1. *kein „innerer“ Drehimpuls:* für genügend kleine Volumina ist der Drehimpuls schon durch den Impuls bestimmt:
$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$
2. *keine „inneren“ Drehmomente:* für genügend kleine Volumina ist das Drehmoment schon durch die Kraft bestimmt:
$$\vec{D} = \vec{x} \times \vec{F}$$

Diese Annahmen gelten nicht für z.B. Teilchen mit Spin.
Mit Hilfe dieser Annahmen erhält man aus der Drehimpulsbilanz für den Impuls:

$$\epsilon_{ijl} x_j \left(\frac{\partial \rho_l^P}{\partial t} + \nabla_k j_{lk}^P \right) + \epsilon_{ikl} j_{lk}^P = \epsilon_{ijl} x_j f_l$$

Nimmt man die Impulsbilanz hinzu, folgt daraus, daß die Impulsstromdichte ein *symmetrisches* Tensorfeld darstellt:

$$\epsilon_{ikl} j_{lk}^P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad j_{lk}^P = j_{kl}^P$$

(HD) *Definition:* Substantielle Ableitung

S. 20

Aussage: Die *substantielle Ableitung* DA/Dt beschreibt die zeitliche Änderung eines Feldes $A(t,\vec{x})$ bei Mitbewegung längs der Stromlinien (im Gegensatz zur partiellen Ableitung $\partial A/\partial t$, die die zeitliche Änderung in einem festen Raumpunkt angibt):

$$\frac{DA}{Dt}(t,\vec{x}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{x} + \vec{v}(t,\vec{x})\,\Delta t) - A(t,\vec{x})}{\Delta t} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A \right)(t,\vec{x})$$

(HD) Eulersche Strömungsgleichung

S. 20f.

Aussage: Der skalare Druck p trägt einen isotropen Teil $p\delta_{ik}$ zum symmetrischen Drucktensor σ_{ik} (die Symmetrie beruht auf der Symmetrie von j_{ik}^P) bei:

$$\sigma_{ik} = p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Der Anteil σ' bezeichnet dabei die *innere Reibung*. Eingesetzt in die Impulsbilanzgleichung erhält man unter zu Hilfenahme der Massenbilanzgleichung folgende Beziehung:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \nabla_k v_i \right) + \nabla_i p + \nabla_k \sigma'_{ik} = f_i$$

Für ein *ideales Fluid* ($\sigma' = 0$) ergibt sich daraus die *Eulersche Strömungsgleichung*:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f}$$

oder (unter Benutzung der substantiellen Ableitung DA/Dt):

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p$$

(HD) Bernoullisches Gesetz

S. 21

Aussage: Gegeben sei die *Eulersche Strömungsgleichung*

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} \qquad (\star)$$

und folgende Identität:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^2) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

Sei außerdem

1. das Fluid *inkompressibel*: $\rho\,(t,\vec{x}) = \rho_0 =$ konstant
2. die Strömung *stationär*: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
3. die Strömung *wirbelfrei*: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$
4. die äußere Kraft mit *Potential*: $\vec{f} = -\vec{\nabla}\phi$

Dann folgt aus ($\star$) das *Bernoullische Gesetz*:

$$\frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}^2 + p + \phi = \text{konstant}$$

(HD) Die Navier-Stokesschen Gleichungen

S. 22f.

Aussage: Ausgehend von der verallgemeinerten Eulerschen Strömungsgleichung für $\sigma' \neq 0$ (innere Reibung):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \nabla_k v_i\right) + \nabla_i p + \nabla_k \sigma'_{ik} = f_i$$

Die innere Reibung kommt dabei durch Relativbewegung von Fluidteilchen zustande, d.h. $\nabla_i v_k \neq 0$. Die einfachste Annahme ist ein linearer Zusammenhang zwischen Reibungsdruck σ'_{ik} und Geschwindigkeitsgradient $\nabla_i v_k$:

$$\sigma'_{ik} = -\eta\left(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla_r v_r\right) - \zeta\delta_{ik}\nabla_r v_r$$

wobei η Zähigkeit oder Viskosität und ζ Volumenzähigkeit oder Volumenviskosität heißt. Die $\nabla_r v_r$ beschreiben volumenändernde Deformationen. Fluide, die diesem Gesetz genügen heißen *Newtonsche Fluide*. Gegenbeispiele sind z.B. Blut und Honig.
Setzt man diese Gleichung nun in die zuerst genannte für die Impulsbilanz ein, ergeben sich die *Navier-Stokesschen Gleichungen*:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) + \vec{\nabla}p - \eta\Delta\vec{v} - (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \vec{f}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung für die Masse und einer *Materialgleichung* der Art

$$p = p\,(T, \rho)$$

sind diese Gleichungen für die fünf Größen $\vec{v}, \rho, p$ unter der Annahme vernachlässigbarer Temperaturänderungen lösbar.

3 Die Maxwellschen Gleichungen (MG)

(MG) Lorentz-Kraft

S. 25

Aussage: Die elektromagnetische Kraft $\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v})$, die eine punktförmige Testladung q erfährt, ist die *Lorentzkraft*:

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) = q\vec{E}(t, \vec{x}) + \kappa q\vec{v} \times \vec{B}(t, \vec{x})$$

Voraussetzung ist, daß die Testladung q nicht auf die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zurückwirkt, d.h. heißt man bestimt $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch

$$\lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}$$

und trennt anschließend den geschwindigkeitsunabhängigen vom geschwindigkeitsabhängigen Beitrag.

(MG) Die Maxwellschen Gleichungen

S. 27

Aussage: Sei

$$\kappa^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0 c^2}$$

dann lauten die *Maxwellschen Gleichungen*:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\kappa\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \kappa\mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

In genauer Umkehrung zur Lorentz-Kraft sind die Ladungs- und Stromverteilung hier als *Quelle* des Feldes und nicht als Objekt seiner Kraftwirkungen zu interpretieren.

(MG) Gaußscher Satz

S. 175

Aussage: Sei ∂V die Oberfläche des Volumens V, dann gilt der *Gaußsche Satz*:

$$\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{A} = \int_V d^3x\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$

(MG) Erstes Maxwellsches Gesetz

S. 27f.

Aussage: Das *erste Maxwellsche Gesetz*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

folgt aus dem *Flußsatz für das elektrische Feld*

$$\Phi^e_{\partial V} \equiv \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3x\rho \equiv \frac{q_V}{\epsilon_0}$$

mit Hilfe des *Gaußschen Satzes*

$$\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \int_V d^3x\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right),$$

da dies für beliebige Volumina V gilt.

(MG) Drittes Maxwellsches Gesetz

S. 29

Aussage: Das *dritte Maxwellsche Gesetz*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

folgt aus dem *Flußsatz für das magnetische Feld*

$$\Phi^m_{\partial V} \equiv \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0$$

mit Hilfe des *Gaußschen Satzes*

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_V d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right),$$

da dies für beliebige Volumina V gilt.

(MG) Stokesscher Satz

S. 175

Aussage: Sei ∂F der Rand der Fläche F, dann gilt der *Stokessche Satz*:

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{A} = \int_F d\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)$$

(MG) Zweites Maxwellsches Gesetz

S. 29f.

Aussage: Das *zweite Maxwellsche Gesetz*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

folgt als Spezialfall für zeitliche konstante Flächen F aus dem *Faradayschen Induktionsgesetz*

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\kappa \frac{d}{dt} \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} \equiv -\kappa \frac{d}{dt} \Phi^m_F = U_{\text{ind}}$$

mit Hilfe des *Stokesschen Satzes*

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \int_F d\vec{f} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

da dies für beliebige Flächen F gilt.

(MG) Viertes Maxwellsches Gesetz

S. 29f.

Aussage: Das *vierte Maxwellsche Gesetz*

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

folgt als Spezialfall für zeitliche konstante Flächen F aus dem *Ampèreschen Durchflutungsgesetz* mit Maxwellschem Zusatzterm

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \kappa \mu_0 \left(\int_F d\vec{f} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F d\vec{f} \cdot \vec{E} \right) \equiv \kappa \mu_0 \left(I_F + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi^e_F \right)$$

mit Hilfe des *Stokesschen Satzes*

$$\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)$$

da dies für beliebige Flächen F gilt.

(MG) Transformationsverhalten von E- und B-Feldern

S. 34

Aussage: Unter Paritätstransformationen P und Zeitumkehrtransformationen T verhalten $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder wie folgt:

$$P: \quad \begin{array}{lcl} \vec{E}(t,\vec{x}) & \rightarrow & -\vec{E}(t,-\vec{x}) \\ \vec{B}(t,\vec{x}) & \rightarrow & +\vec{B}(t,-\vec{x}) \end{array} \quad \text{(Parität)}$$

$$T: \quad \begin{array}{lcl} \vec{E}(t,\vec{x}) & \rightarrow & +\vec{E}(-t,\vec{x}) \\ \vec{B}(t,\vec{x}) & \rightarrow & -\vec{B}(-t,\vec{x}) \end{array} \quad \text{(Zeitumkehr)}$$

(MG) Maßsysteme in der Elektrodynamik

S. 35ff.

Aussage: Für die Vorfaktoren der Maxwellschen Gleichungen gilt:

$$\kappa^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2}$$

Man unterscheidet nun

1. asymmetrische Maßsysteme: $\kappa = 1$, $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$
   → gut für praktische Zwecke geeignet
   (a) elektrostatisches Maßsystem: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, $\mu_0 = \frac{4\pi}{c^2}$
   ⇒ einfaches Coulomb-Gesetz
   (b) magnetostatisches Maßsystem: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2}$, $\mu_0 = 4\pi$
   ⇒ einfaches Biot-Savart-Gesetz
   (c) SI = „Système International“: Definition der Einheit Ampere
   → fast universell akzeptiert
2. symmetrische Maßsysteme: $\kappa = \frac{1}{c}$, $\epsilon_0\mu_0 = 1$
   → gut v.a. für theoretische Physik
   (a) Gaußsches Maßsystem: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, $\mu_0 = 4\pi$
   ⇒ einfaches Coulomb-Gesetz
   (b) Heavisidesches Maßsystem: $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$
   → symmetrisches Maßsystem, v.a. in der Quantenfeldtheorie verwandt

(MG) Maxwellsche Gleichungen als eindeutig bestimmtes Anfangswertproblem

S. 38

Aussage: Die Maxwellschen Gleichungen sind durch Vorgabe von $\vec{E}(t_0, \vec{x})$ und $\vec{B}(t_0, \vec{x})$ für alle Zeiten t eindeutig bestimmt.
Begründung: Aufgrund von

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa\mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

sind auch die partiellen Zeitableitungen $\partial\vec{E}/\partial t$ und $\partial\vec{B}/\partial t$ zum Zeitpunkt t_0 bekannt. Leitet man die beiden Gleichungen n-mal ab, so zeigt sich, daß die n-te partielle Ableitung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zur Zeit t_0 auch die $(n+1)$-te partielle Zeitableitung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bei t_0 bestimmt. Aufgrund von vollständiger Induktion ergibt sich, daß die zeitliche Entwicklung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ damit vollständig gegeben ist.
Die beiden übrigen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

stellen Nebenbedingungen zu jedem festen Zeitpunkt dar. Sind sie für die Anfangswerte erfüllt, so gelten sie auch für alle späteren Felder, denn mit Hilfe der zuerst genannten Maxwell-Gleichungen läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) &= 0 \end{aligned}$$

(MG) E- und B-Felder an Flächen

S. 39

Aussage: Folgende Anschlußbedingungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gelten an einer Fläche F, auf der eine Flächenladungsdichte ω oder eine Flächenstromdichte $\vec{k}$ vorgegeben ist:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= \frac{\omega}{\epsilon_0}, & \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0, \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0, & \vec{n}_{12} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= \kappa\mu_0\vec{k}. \end{aligned}$$

Man erhält diese Beziehungen durch Integration über die Oberfläche eines Volumens, daß man gegen F gehen läßt.

(MG) Elektromagnetische Potentiale

S. 41

Aussage: Aus der dritten Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

folgt die Existenz eines *Vektorpotentials A*:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Setzt man in die zweite Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ein so ergibt sich daraus

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \kappa \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

die Existenz eines *skalaren Potentials* ϕ mit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \kappa \frac{\partial A}{\partial t}$$

(MG) Eichtransformationen

S. 41f.

Aussage: Die beiden elektromagnetischen Potentiale $\vec{A}$ und ϕ, die gegeben sind durch

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \text{und} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \kappa \frac{\partial A}{\partial t}$$

sind nicht eindeutig. Die eichtransformierten Potentiale

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad \text{und} \qquad \phi \to \phi' = \phi - \kappa \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

mit beliebigem $\chi = \chi(t, \vec{x})$ für zu genau den gleichen Feldern. Man wählt daher *Eichbedingungen*. Die beiden wichtigsten sind:

1. Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\chi = 0$
2. Lorentz-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box\chi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta\chi = 0$

Eichtransformationen unter gegebenen Eichbedingungen heißen *residuale Eichtransformationen*.

(MG) Elektromagnetische Potentiale in der Coulomb-Eichung

S. 42f.

Aussage: In der Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

ergeben sich für die elektromagnetischen Potentiale aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa\mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box\vec{A} &\equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \kappa\mu_0 \vec{j}_t \end{aligned}$$

mit dem transversalen, divergenzfreien Anteil des Stroms:

$$\vec{j}_t = \vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

(MG) Elektromagnetische Potentiale in der Lorentz-Eichung

S. 42f.

Aussage: In der Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

ergeben sich für die elektromagnetischen Potentiale aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa\mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

folgende inhomogene Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \Box\phi &\equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box\vec{A} &\equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \kappa\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

(MG) Kontinuitätsgleichung der Energie des elektromagnetischen Feldes

S. 43

Aussage: Der Lorentz-Kraft zufolge ergibt sich für die während $\Delta t = t_2 - t_1$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an der Punktladung q geleistete Arbeit zu

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \vec{v} \cdot \vec{F} = q \int_{t_1}^{t_2} dt\ \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Und für die Energiequelldichte erhält man mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen:

$$q^E = -\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j^E} = q^E$$

mit der Energiedichte ρ^E

$$\rho^E = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

und der Energiestromdichte $\vec{j}^E$, auch *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ genannt:

$$\vec{j}^E = \frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} =: \vec{S}$$

(MG) Feldenergie des elektromagnetischen Feldes

S. 44f.

Aussage: Anhand der Energiedichte ρ^E

$$\rho^E = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

erkennt man, daß die *Feldenergie* U in einem Volumen V in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil zerfällt:

$$\begin{aligned} U &= U^e + U^m \\ \text{mit} \qquad U^e = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x\ \vec{E}^2 \qquad &\text{und} \qquad U^m = \frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\ \vec{B}^2 \end{aligned}$$

Für *statische* Felder läßt sich die Feldenergie mit Hilfe der Potentiale darstellen, unter der Annahme, daß diese im Unendlichen genügend rasch abfallen:

$$U^e = \frac{1}{2}\int d^3x\ \rho\,\phi \qquad \text{und} \qquad U^m = \frac{\kappa}{2}\int d^3x\ \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Zerlegt man Ladungsdichten, Ladungsströme und Felder in zwei Teile, so ergibt sich für die Feldenergie ein zusätzlicher Wechselwirkungsterm U_{12}:

$$U = U_1 + U_2 + U_{12}$$

Elektrische und magnetische Energien, sind also *nicht additiv*.

(MG) Maxwellscher Spannungstensor

S. 47f.

Aussage: Als Kontinuitätsgleichung für den Impuls des elektromagnetischen Feldes erwartet man:

$$\frac{\partial \rho_i^P}{\partial t} + \nabla_k j_{ik}^P = f_i$$

Die *Kraftdichte* entspricht der Lorentzkraftdichte:

$$f_i = -\rho E_i - \kappa \epsilon_{ikl} j_k B_l$$

Mit Hilfe aller Maxwellschen Gleichungen findet man für die *Impulsdichte*

$$\rho_i^P = \kappa \epsilon_0 \epsilon_{ikl} E_k B_l$$

und als *Impulsstromdichte*

$$j_{ik}^P = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ik} - E_i E_k \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ik} - B_i B_k \right) =: -T_{ik},$$

die bis auf das Vorzeichen identisch mit dem *Maxwellschen Spannungstensor* T_{ik} ist. Impulsstromdichte und Spannungstensor sind nach dieser Gleichung *symmetrisch*:

$$j_{ik}^P = j_{ki}^P \qquad \text{und} \qquad T_{ik} = T_{ki}$$

Der Drucktensor beschreibt die auf ein Volumen V ausgeübte Druckkraft $\vec{F}$:

$$F_i = \int_{\partial V} df_k T_{ik} = \int_V d^3x \nabla_k T_{ik}$$

(MG) Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

S. 47ff.

Aussage: Als *Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls* erwartet man folgende Beziehung:

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} + \nabla_k j_{ik}^L = d_i$$

Aus der Symmetrie von Impulsstromdichte bzw. Spannungstensor folgt nun mit Hilfe dieser Gleichung, daß folgende Ansätze

$$d_i = \epsilon_{ijl} x_j f_l, \qquad \rho_i^L = \epsilon_{ijl} x_j \rho_l^P, \qquad j_{ik}^L = \epsilon_{ijl} x_j j_{lk}^P$$

erfüllt sind, die besagen, daß die Photonen keinen Eigendrehimpuls tragen, was sicherlich nicht stimmt, da diese Spin 1 haben. Allerdings gibt es Freiheiten: Neben der Impulsdichte ρ_i und der Impulsstromdichte j_{ik} erfüllen auch

$$\hat{\rho}_i = \rho_i + \nabla_k C_{ik} \qquad \text{und} \qquad \hat{j}_{ik} = j_{ik} - \frac{\partial C_{ik}}{\partial t} + \nabla_l F_{ikl}$$

(für beliebige C_{ik} und F_{ikl} mit $F_{ikl} + F_{ilk} = 0$) die Kontinuitätsgleichung für den Impuls. Nur Experimente können diese Frage entscheiden.

4 Elektrostatik (ES)

(ES) Grundgleichungen der Elektrostatik

S. 51

Aussage: Für statische Felder entkoppeln sich die Maxwellschen Gleichungen und man erhält für das elektrische Feld die *Grundgleichungen der Elektrostatik*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich direkt das *skalare Potential* ϕ:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

Eingesetzt in die erste Gleichung erhält man die *Poisson-Gleichung*:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die Elektrostatik ist also die Theorie der Lösungen der Poisson-Gleichung.
Als *eindeutige Lösung* erhält man unter der Randbedingung $\lim_{|\vec{x}| \to \infty} \phi(\vec{x}) = 0$ bei im Unendlichen genügend schnell abfallenden Ladungsverteilungen $\rho(\vec{x})$ folgendes Potential:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

(ES) *Definition:* Greensche Funktion

S. 52

Aussage: Unter einer *Greenschen Funktion* $G(x, x')$ zu einem linearen Differentialoperator L versteht man eine Distribution, für die gilt:

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x')$$

Mit Hilfe einer Greenschen Funktion kann die Lösung der allgemeinen inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$Lf = g$$

explizit als Faltungsintegral von Quelle und Greenscher Funktion geschrieben werden:

$$f(x) = \int dx'\, G(x, x')\, g(x')$$

Die Differenz zweier Greenscher Funktionen ist Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung:

$$u(x, x') := G_2(x, x') - G_1(x, x') \qquad \Rightarrow \qquad L_x u(x, x') = 0$$

Explizit lautet die Greensche Funktion in drei Dimensionen:

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

(ES) Multipolentwicklung in der Elektrostatik

S. 52f.

Aussage: Sei die Ladungsverteilung ρ in einem Gebiet um den Punkt $\vec{x}_0$ herum lokalisiert. Dann läßt sich das Potential mit Hilfe der Taylorschen Formel

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})^l \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right)$$

um $\vec{x}_0$ herum in Multipole entwickeln:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6} q_{ij} \frac{3 r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right)$$

mit dem

$$\begin{aligned} \text{Monopolmoment} \quad & q && := \int d^3x' \rho(\vec{x}') \\ \text{Dipolmoment} \quad & \vec{p} && := \int d^3x' \rho(\vec{x}')\, \vec{r}' \\ \text{Quadrupolmoment} \quad & q_{ij} && := \int d^3x' \rho(\vec{x}')\, (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \end{aligned}$$

Das Quadrupolmoment q_{ij} ist dabei ein symmetrischer und spurfreier Tensor. Allgemein läßt sich das Potential schreiben als Summe von *Multipolfeldern* ϕ_l

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(\vec{x})$$

Diese haben für große $|\vec{x}|$ das asymptotische Verhalten:

$$\phi_l(\vec{x}) \sim \frac{1}{|\vec{x}|^{l+1}} \qquad \text{für} \quad |\vec{x}| \to \infty$$

Anstelle der Taylorentwicklung läßt sich die Greensche Funktion auch nach Kugelfunktionen entwickeln; das asymptotische Verhalten bleibt gleich.

(ES) Formfaktoren in der Elektrostatik

S. 54f.

Aussage: Die Multipolmomente nennt man auch *Formfaktoren*, da sie Informationen über die räumliche Ladungsverteilung enthalten:

- Monopolmoment q: Skalar ⇒ rotationsinvariant
- Dipolmoment $\vec{p}$: Vektor ⇒ $|\vec{p}|$ rotationsinvariant,
  → Richtung beschreibt Lage des Dipols
- Quadrupolmoment q_{ij}: symmetrischer Tensor ⇒ Diagonalgestalt möglich
  → Diagonalelemente = Eigenwerte von q_{ij}: rotationsinvariant

(ES) Mathematische Multipole

S. 54f.

Aussage: Aus Punktladungen lassen sich Ladungsverteilungen aufbauen, deren erste $l-1$ Multipolmomente verschwinden. Singuläre Ladungsverteilungen mit nur einem einzigen Multipolterm sind *mathematische Multipole:*

$$\begin{aligned} \text{mathematischer Monopol (Punktladung):} \quad & \rho_q(\vec{x}) && := q\ \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ \text{mathematischer Dipol:} \quad & \rho_{\vec{p}}(\vec{x}) && := -(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ \text{mathematischer Quadrupol:} \quad & \rho_{q_{ij}}(\vec{x}) && := \frac{1}{6} q_{kl} \nabla_k \nabla_l\ \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) \end{aligned}$$

(ES) Wechselwirkungsenergie in der Elektrostatik

S. 56

Aussage: Setzt man die Multipolentwicklung von ϕ in die Formel für die Wechselwirkungsenergie zwischen Ladungsverteilung und Feld

$$U^{WW} = \int d^3x\ \rho(\vec{x})\ \phi(\vec{x})$$

ein, so ergibt als *Wechselwirkungsenergie eines elektrischen Dipols:*

$$U^{WW}_{\text{el.Dipol}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{x}_0)$$

und für die *Kraft* und das *Drehmoment* auf den Dipol:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}_0) &= -\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})(\vec{x}_0) \\ \vec{D}(\vec{x}_0) &= -\vec{p}\times\vec{E}(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

(ES) Ladungsverteilung auf einem Leiter

S. 57

Aussage: Im Innern eines elektrischen Leiters endlicher Leitfähigkeit muß im Gleichgewicht

$$\vec{E}_{\text{innen}} \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{\text{innen}} = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\text{innen}} \equiv 0$$

gelten, da das Feld sonst zu Strömen führen würde. D.h. die Ladungen sitzen mit Flächendichte ω auf der *Oberfläche* des Leiters und es gilt:

$$\vec{n}\cdot\vec{E}_{\text{außen}} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi_{\text{außen}} = \frac{\omega}{\epsilon_0} \qquad \text{und} \qquad \vec{n}\times\vec{E}_{\text{außen}} = 0$$

(ES) Erste Greensche Formel

S. 58

Aussage: Die *erste Greensche Formel* lautet:

$$\int_{\partial W} d\vec{f}\cdot\phi\vec{\nabla}\psi = \int_W d^3x\,(\phi\Delta\psi + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi)$$

Sie ergibt sich direkt aus dem Gaußschen Satz.

(ES) Zweite Greensche Formel

S. 58

Aussage: Die *zweite Greensche Formel* lautet:

$$\int_{\partial W} d\vec{f}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi) = \int_W d^3x\,(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)$$

Sie ergibt sich aus der ersten Greenschen Formel durch Antisymmetrisierung.

(ES) Dirichletsches Randwertproblem

S. 57ff.

Aussage: Beim *Dirichletschen Randwertproblem* der Elektrostatik sind

1. die Ladungsverteilung ρ auf einem Gebiet W
2. das Potential V auf dem Rand ∂W

gegeben. Gesucht ist die Lösung ϕ der Poisson-Gleichung mit

$$\phi|_{\partial W} = V$$

(ES) Neumannsches Randwertproblem

S. 57ff.

Aussage: Beim *Neumannschen Randwertproblem* der Elektrostatik sind

1. die Ladungsverteilung ρ auf einem Gebiet W
2. die Flächenladungsdichte ω auf dem Rand ∂W

gegeben. Gesucht ist die Lösung ϕ der Poisson-Gleichung mit

$$(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\phi\,|_{\partial W} = \frac{\omega}{\epsilon_0}$$

(ES) Eindeutigkeit des Randwertproblems in der Elektrostatik

S. 59

Aussage: Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen des Dirichletschen bzw. Neumannschen Randwertproblems im Gebiet W, so erhält man mit Hilfe der ersten Greenschen Formel für die Differenz $\psi := \phi_1 - \phi_2$:

$$\int_W d^3x\,(\vec{\nabla}\psi)^2 = \int_{\partial W} d\vec{f}\cdot\psi\vec{\nabla}\psi = 0$$

und damit $\vec{\nabla}\psi \equiv 0 \Rightarrow \psi \equiv 0$ auf W (Dirichlet) bzw. $\psi \equiv$ konst. (Neumann). D.h. das Dirichletsche Randwertproblem ist *eindeutig* und das Neumannsche Randwertproblem *eindeutig bis auf eine additive Konstante*.

(ES) Existenz von Lösungen des Randwertproblems der Elektrostatik

S. 64/66

Aussage: Der Beweis der Existenz von Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems läßt sich auf die Existenz von Lösungen des entsprechenden homogenen Randwertproblems

$$\Delta u(\vec{x},\vec{x}') = 0$$

reduzieren, indem die Greensche Funktion auf folgende Weise zerlegt

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G_0(\vec{x},\vec{x}') + u(\vec{x},\vec{x}')$$

und dabei im Dirichcleletschen Falle

$$u_D(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W} = -G_0(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W}$$

bzw. beim Neumannschen Randwertproblem

$$(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\,u_N(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W} = -(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\,G_0(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W} + \frac{4\pi}{|\partial W|}$$

fordert. Physikalisch entspricht

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}u(\vec{x},\vec{x}')$$

dem Potential der von der Ladung q auf den Leitern L_i *influenzierten Bildladungen*.

(ES) Bildkraft

S. 66

Aussage: Die Greensche Funktion läßt sich in zwei Teile zerlegen

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G_0(\vec{x},\vec{x}') + u(\vec{x},\vec{x}')$$

wobei $u(\vec{x},\vec{x}')$ Lösung der homogenen Randwertaufgabe ist:

$$\Delta u(\vec{x},\vec{x}') = 0$$

Das Potential

$$\phi_{\inf}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}u(\vec{x},\vec{x}')$$

rührt von den durch die Ladung q auf den Leitern L_i *influenzierten Bildladungen* her. Diese unterwerfen die sie erzeugende Ladung q der sogenannten *Bildkraft*

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}'u(\vec{x}',\vec{x})|_{\vec{x}'=\vec{x}}$$

(ES) Elektrostatische Gesamtenergie

S. 59

Aussage: Für Gesamtenergie des Feldes im elektrostatischen Fall ergibt sich:

$$U^e = \frac{\epsilon_0}{2}\int_W d^3x\vec{E}^2 = \frac{1}{2}\sum_i V_iQ_i + \frac{1}{2}\int_W d^3x\;\rho\;\phi$$

wobei V_i das Potential und Q_i die Ladung auf dem i-ten Leiter darstellt.

(ES) Dirichletsche Greensche Funktion

S. 63

Aussage: Das Dirichletsche Randwertproblem (ρ auf W und V auf ∂W gegeben und $\phi|_{\partial W} = V$ gefordert) läßt sich zurückführen auf die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta G_D(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\;\delta(\vec{x},\vec{x}')$$

der *Dirichletschen Greenschen Funktion* $G_D(\vec{x},\vec{x}')$ mit der Randbedingung

$$\Delta G_D(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W} = 0$$

die sich mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel und der Poisson-Gleichung wie folgt ergibt:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_W d^3x'\;G_D(\vec{x}',\vec{x})\;\rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial W} d\vec{f}'\cdot V(\vec{x}')\;\vec{\nabla}'G_D(\vec{x}',\vec{x})$$

Die Dirichletsche Greensche Funktion ist außerdem *symmetrisch*:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = G_D(\vec{x}',\vec{x})$$

(ES) Neumannsche Greensche Funktion

S. 63f.

Aussage: Das Neumannsche Randwertproblem (ρ auf W und ω auf ∂W gegeben und $(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\phi\,|_{\partial W} = \frac{\omega}{\epsilon_0}$ gefordert) läßt sich zurückführen auf die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta G_N(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\,\delta(\vec{x},\vec{x}')$$

der *Neumannschen Greenschen Funktion* $G_N(\vec{x},\vec{x}')$ mit der Randbedingung

$$(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})G_N(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial W} = \frac{4\pi}{|\partial W|}$$

die sich mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel und der Poisson-Gleichung wie folgt ergibt:

$$\phi(\vec{x}) = \langle\phi\rangle_{\partial W} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_W d^3x'\;G_N(\vec{x}',\vec{x})\;\rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\partial W} df'\;\omega(\vec{x}')\;G_N(\vec{x}',\vec{x})$$

(ES) Kapazitätsmatrix

S. 59f./65

Aussage: Gegeben sei ein Dirichletsches Randwertproblem mit einer Ladungsverteilung von $\rho\equiv 0$. Dann ergibt sich die Ladung auf dem i-ten Leiter zu

$$\begin{aligned} Q_i &= -\epsilon_0\int_{\partial L_i} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{4\pi}\sum_j V_j\int_{\partial L_i} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\int_{\partial L_j} d\vec{f'}\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x}',\vec{x}) = \sum_j C_{ij}V_j \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten der *Kapazitätsmatix*

$$C_{ij} := -\frac{\epsilon_0}{4\pi}\int_{\partial L_i} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\int_{\partial L_j} d\vec{f'}\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x}',\vec{x})$$

Aus der der Definition der Kapazitätskoeffizienten läßt sich die Symmetrie der Kapazitätsmatrix erkennen:

$$C_{ij} = C_{ji}$$

(ES) Eigenschaften der Kapazitätmatrix

S. 60

Aussage: Die Kapazitätsmatix C_{ij} hat folgende Eigenschaften:

1. die Zeilensumme verschwindet: $\sum_i C_{ij} = 0$
2. die Spaltensumme verschwindet: $\sum_j C_{ij} = 0$
3. sie ist symmetrisch: $C_{ij} = C_{ji}$

(ES) *Satz:* Thomsonsches Prinzip

S. 65

Aussage: Gibt man auf den Leitern L_i die Gesamtladungen Q_i vor, so stellt sich im Gleichgewicht die Ladungsverteilung so ein, daß die elektrostatische Feldenergie minimal wird.

Beweis: Sei ϕ_0 die eindeutige Lösung des Neumannschen Randwertproblems und

$$\phi := \phi_0 + \phi_1$$

ein anderes Potential mit

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\phi_0 \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial L_i} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\frac{Q_i}{\epsilon_0} = \int_{\partial L_i} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\phi_0$$

Dann ergibt sich für die elektrostatische Feldenergie:

$$U^e[\phi] = \frac{\epsilon_0}{2}\int_W d^3x\,(\vec{\nabla}\phi)^2 = U^e[\phi_0] + \frac{\epsilon_0}{2}\int_W d^3x\,(\vec{\nabla}\phi_1)^2 + \epsilon_0\int_W d^3x\,\vec{\nabla}\phi_0\cdot\vec{\nabla}\phi_1$$

Der letzte Term ist jedoch Null, so daß

$$U^e[\phi] = U^e[\phi_0] + \frac{\epsilon_0}{2}\int_W d^3x\,(\vec{\nabla}\phi_1)^2 \geq U^e[\phi_0]$$

(ES) Mögliche Verfahren zum Lösen von elektrostatischen Randwertaufgaben

S. 67ff.

Aussage:

1. Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators Δ
   - → angepaßt an die jeweilige Symmetrie (z.B. Kugelfunktionen)
2. Funktionstheoretische Verfahren
   - → bei Translationssymmetrie in einer Richtung (effektiv 2-dim. Problem)
   - → Seien W_1 und W_2 Gebiete in der komplexen Ebene und $f: W_2\to W_1$ eine umkehrbar eindeutige, biholomorphe Abbildung, dann gilt:

     $$G_D^{(W_2)}(z,z') = G_D^{(W_1)}(f(z),f(z'))$$

     d.h. man löst das Problem für ein einfaches Gebiet W_1 und findet die Greensche Funktion $G_D^{(W_2)}(z,z')$ für das komplizierte Gebiet W_2 durch holomorphe Transformation
3. Spiegelungsmethoden
   - → Einführung von Bildladungen mit Potential $u(\vec{x},\vec{x}')$ durch Spiegelung der Punktladung in $\vec{x}'$ am Rand ∂W

(ES) ***Beispiel:*** **Spiegelung an einer Ebene/Kugel**

S. 69f.

Inhalt: Die Spiegelungsmethode ist eine Art, ein elektrostatische Randwertproblem zu lösen. Konkret sei die Punktladung q im Punkt $\vec{x}$ lokalisiert.

1. Spiegelung an einer Ebene: Bezeichne σ die Spiegelung an einer Ebene, dann ergibt sich die Dirichletsche Greensche Funktion zu:

$$G_D(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}' - \sigma\vec{x}|}$$

Mit Hilfe des Flußsatzes findet man für die influenzierte Ladung

$$q_{\text{inf}} = -q$$

2. Spiegelung an einer Kugel: Bezeichne τ die Spiegelung an einer Kugel mit Radius R, d.h.

$$\tau\vec{y} = \frac{R^2}{|\vec{y}|^2}\vec{y}$$

dann ergibt sich die Dirichletsche Greensche Funktion zu:

$$G_D(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} - \frac{R}{|\vec{x}|}\frac{1}{|\vec{x}' - \tau\vec{x}|}$$

Mit Hilfe des Flußsatzes findet man für die influenzierte Ladung

$$q_{\text{inf}} = -q\frac{R}{|\vec{x}|}$$

5 Magnetostatik (MS)

(MS) Grundgleichungen der Magnetostatik

S. 71f.

Aussage: Für statische Felder entkoppeln sich die Maxwellschen Gleichungen und man erhält für das magnetische Feld die *Grundgleichungen der Magnetostatik*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa\mu_0\vec{j}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich direkt das *Vektorpotential $\vec{A}$*:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Eingesetzt in die erste Gleichung erhält man in der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, die in der Magnetostatik bevorzugt wird, die vektorielle Form der *Poisson-Gleichung*:

$$\Delta\vec{A} = -\kappa\mu_0\vec{j}$$

Die Elektrostatik ist also die Theorie der Lösungen der vektoriellen Poisson-Gleichung. Als *eindeutige Lösung* erhält man unter der Randbedingung $\lim_{|\vec{x}|\to\infty}\vec{A}(\vec{x}) = 0$ bei im Unendlichen genügend schnell abfallenden Stromverteilungen $\vec{j}(\vec{x})$ folgendes Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Aus der zweiten Grundgleichung ergibt sich außerdem die *Stationaritätsbedingung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

(MS) Quasistationäre Vorgänge

S. 72

Aussage: Von *quasistationären Vorgängen* spricht man, wenn die Felder zwar zeitlich veränderlich sind, diese Veränderungen aber so langsam vor sich gehen, daß in der vierten Maxwellschen Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \kappa\mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

der Maxwellsche Verschiebungsstrom $\epsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$ gegenüber dem Quellterm $\vec{j}$ vernachlässigt werden kann.
Dies ist typischerweise für Prozesse mit Frequenzen $\ll 10^{14}$ Hz der Fall.

(MS) Biot-Savartsches Gesetz

S. 72

Aussage: Aus der eindeutigen Lösung des Vektorpotentials in der Elektrostatik

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

erhält man mit Hilfe der Definition des Vektorpotentials das *Biot-Savartsche Gesetz*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

(MS) Multipolentwicklung in der Magnetostatik

S. 74

Aussage: Sei die Stromverteilung $\vec{j}$ in einem Gebiet um den Punkt $\vec{x}_0$ herum lokalisiert. Dann läßt sich das Vektorpotential mit Hilfe der Taylorschen Formel

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}(\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}})^l\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)$$

um $\vec{x}_0$ herum in Multipole entwickeln:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + \ldots$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\vec{m} := -\frac{\kappa}{2}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}')\times\vec{r}'$$

Ein Monopolmoment tritt dabei nicht auf. Für das Magnetfeld ergibt sich daraus

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) + \ldots$$

(MS) Wechselwirkungsenergie in der Magnetostatik

S. 76f.

Aussage: Setzt man die Multipolentwicklung von $\vec{A}$ in die Formel für die Wechselwirkungsenergie zwischen Stromverteilung und Feld

$$U^{WW} = \kappa\int d^3x \, \vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})$$

ein, so ergibt als *Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols:*

$$U^{WW}_{\text{magn.Dipol}} = \vec{m}\cdot\vec{E}(\vec{x}_0)$$

Interessant ist, daß sich das Vorzeichen von der Wechselwirkungenergie eines elektrischen Dipols unterscheidet. Es läßt sich nachrechnen, daß nicht U^{WW}, sondern $-U^{WW}$ als mechanisches Potential für Kräfte fungiert (vgl. S. 77).

(MS) Magnetostatische Gesamtenergie

S. 77f.

Aussage: Für Gesamtenergie des Feldes im magnetostatischen Fall ergibt sich für fadenförmige Ringströme I_i entlang von Leiterschleifen S_i:

$$U^m = \frac{\kappa}{2}\int d^3x \, \vec{j}\cdot\vec{A} = \frac{\kappa}{2}\sum_i I_i \int_{S_i} d\vec{x}\cdot\vec{A} = \frac{\kappa}{2}\sum_i I_i\Phi_i^m$$

(MS) Induktivitätsmatrix

S. 78

Aussage: Gegeben sei ein Dirichletsches Randwertproblem für fadenförmige Ringströme I_i entlang von Leiterschleifen S_i. Dann ergibt sich der Fluß durch die i-te Leiterschleife zu

$$\begin{aligned}\Phi_i^m &= \int_{S_i} d\vec{x}\cdot\vec{A} \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\sum_j I_j\int_{S_i} d\vec{x}\cdot\int_{S_j} d\vec{x}' \; G_D(\vec{x}',\vec{x}) = \frac{1}{\kappa}\sum_j L_{ij}I_j\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten der *Induktivitätsmatix*

$$L_{ij} := \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_i} d\vec{x}\cdot\int_{S_j} d\vec{x}' \; G_D(\vec{x}',\vec{x})$$

Aus der der Definition der Induktivitätskoeffizienten läßt sich die Symmetrie der Induktivitätsmatrix erkennen:

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Die Hauptdiagonalelemente ($i = j$) heißen *Selbstinduktivitäten*, die Nebendiagonalelemente ($i \neq j$) nennt man *Wechselinduktivitäten*.

6 Elektromagnetische Wellen (EW)

(EW) Maxwellsche Gleichungen im Vakuum

S. 83f.

Aussage: Die *Maxwellsche Gleichungen im Vakuum* lauten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\kappa\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\kappa c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Diese Gleichungen sind invariant unter der Substitution

$$\vec{E}\to\kappa\vec{B}, \qquad \vec{B}\to-\frac{1}{\kappa c^2}\vec{E}$$

Bildet man die Rotation der jeweils zweiten Gleichung, so erhält man mit Hilfe der übrigen Gleichungen zwei *Wellengleichungen* für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\Box\vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \Box\vec{B} = 0$$

Unterwirft man die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ der Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{\kappa c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

so müssen auch die Potentiale Wellengleichungen erfüllten:

$$\Box\phi = 0 \quad \text{und} \quad \Box\vec{A} = 0$$

(EW) Ebene Wellenlösungen und deren Geschwindigkeit

S. 84

Aussage: Die Wellengleichungen, die sich aus den Maxwellgleichungen im Vakuum ergeben, besitzen u.a. *ebene Wellen* als Lösungen:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{x}) &= \vec{E}_0\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \vec{B}(t,\vec{x}) &= \vec{B}_0\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \phi(t,\vec{x}) &= \phi_0\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \vec{A}(t,\vec{x}) &= \vec{A}_0\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\end{aligned}$$

mit

$$\omega^2 = c^2\vec{k}^2$$

(EW) Eigenschaften ebener Wellenlösungen im Vakuum

S. 84f.

Aussage: Elektromagnetische ebene Wellen im Vakkum haben folgende Eigenschaften:

1. Dispersionsfreiheit: Die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit der Vakuum-Wellen ist unabhängig von der Wellenlänge (bzw. der Frequenz) gleich c:

$$v_{ph} := \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|} = 0 \quad \text{und} \quad v_{gr} := |\vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega(\vec{k})| = c$$

2. Transversalität: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}/k$, was sich ergibt, wenn man die ebenen Wellenlösungen wieder in die Maxwellgleichungen einsetzt:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0, \qquad \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$$
$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \kappa\omega\vec{B}_0, \qquad \vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{\omega}{\kappa c^2}\vec{E}_0$$

3. Polarisierung: Sei ein Koordinatensystem so definiert, daß ($a, b \in \mathbb{C}$)

$$\vec{k} = k\vec{e}_3, \qquad \vec{E}_0 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, \qquad \vec{B}_0 = \frac{1}{\kappa c}(a\vec{e}_2 + b\vec{e}_1)$$

   (a) *lineare Polarisation:* a und b haben gleiche Phase (bis auf Vorzeichen)
   (b) *elliptische Polarisation:* a und b haben verschiedene Phasen
   (c) *zirkulare Polarisation:* $|a| = |b|$ und $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pm ia$

4. Fundamentalität linear polarisierter Wellen: jede beliebig polarisierte ebene Welle läßt sich durch Superposition linear polarisierter ebener Wellen erzeugen

(EW) *Definition:* Chiralität

S. 86f.

Aussage: Unter *Chiralität* versteht man die *Händigkeit* von Wellen. Es gibt Rechts- und Linkshändigkeit:

1. Rechtshändigkeit/positive Helizität/Linkszirkularität: Blick man gegen die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ auf die Welle, so laufen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ *gegen den Uhrzeigersinn* um
2. Linkshändigkeit/negative Helizität/Rechtszirkularität: Blick man gegen die Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ auf die Welle, so laufen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ *im Uhrzeigersinn* um

(EW) Energiedichte und Energiestromdichte ebener Wellen

S. 87

Aussage: Mit Hilfe der nützlichen Identität

$$\langle \mathcal{R}e(A_0\ e^{-i\omega t})\ \mathcal{R}e(B_0\ e^{-i\omega t})\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(A_0^* B_0)$$

ergibt sich für die Energiedichte ρ^E und die Energiestromdichte $\vec{j}^E$ (Poynting-Vektor $\vec{S}$) ebener Wellen

$$\begin{aligned} \langle \rho^E \rangle = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}_0|^2 &= \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}_0|^2 \\ \left\langle \vec{j}^E \right\rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2}\frac{\vec{k}}{k}|\vec{E}_0|^2 &= \frac{c}{2\mu_0}\frac{\vec{k}}{k}|\vec{B}_0|^2 \end{aligned}$$

D.h. die Energie strömt entlang der Ausbreitungsrichtung mit Geschwindigkeit c:

$$\left|\left\langle \vec{j}^E \right\rangle\right| = c\,\langle \rho^E \rangle$$

(EW) Retardierte Greensche Funktion

S. 88ff.

Aussage: Die Maxwell-Gleichungen führen in der Lorentz-Eichung auf inhomogene Wellengleichungen

$$\Box f = g$$

Diese lassen sich durch die Einführung von Greenschen Funktionen G des Wellenoperators $\Box$ lösen, für die gilt:

$$\Box G(t-t', \vec{x}-\vec{x}') = 4\pi\ \delta(t-t')\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Denn dann erfüllt

$$f(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int dt' d^3x'\ G(t-t', \vec{x}-\vec{x}')\ g(t', \vec{x}')$$

die Wellengleichung. Im allgemeinen wählt man eine spezielle Greensche Funktion: Die *retardierte Greensche Funktion* $G_{ret}(t-t', \vec{x}-\vec{x}')$, mit

$$G(t-t', \vec{x}-\vec{x}') = 0 \qquad \text{für} \quad t < t'$$

Dann macht sich nämlich eine zur Zeit t' einsetzende Störung g erst zu späteren Zeiten $t \geq t'$ in der Lösung f bemerkbar.
Bildet man die Fourier-Transformierten von G und δ, so ergibt sich

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\ \tilde{G}(\omega, \vec{k}) = 4\pi$$

Nach der Rücktransformation weist der Integrand bei $\pm ck$ Pole auf. Daher erweitert man ω zur komplexen ω-Ebene und kann nun nach dem Cauchyschen Integralsatz um die Singularitäten herum integrieren. Mit Hilfe des Residuensatzes findet man

$$\begin{aligned} G_{ret}(t-t', \vec{x}-\vec{x}') &= \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\ \delta([t-t'] - |\vec{x}-\vec{x}'|/c) \\ &= \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\ \delta(c[t-t'] - |\vec{x}-\vec{x}'|) \end{aligned}$$

D.h. G_{ret} liegt auf dem *Vorwärts-Lichtkegel*. Dies bezeichnet man als *Huygenssches Prinzip*, welches nur in ungeraden Raumdimensionen ≥ 3 gilt. In geraden Raumdimensionen tritt *Reverberation* („Nachhall") auf, d.h. ein eine punktuelle Erregung macht sich in entfernten Punkten als zeitlich ausgedehntes, abklingendes Signal bemerkbar.
Für die Funktion f erhält man nun

$$f_{ret}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\ \frac{g(t_{ret}, \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

mit der *retardierten Zeit*

$$t_{ret} = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$$

(EW) Potentiallösungen der Wellengleichungen

S. 91

Aussage: Zu vorgegebenen Quellen ρ und $\vec{j}$ erhält man in der Lorentz-Eichung folgende retardierte Potentiale:

$$\begin{aligned}
\phi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\ \frac{\rho(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\ \frac{\vec{j}(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
\end{aligned}$$

Der wichtigste Spezialfall ist periodische Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
\rho(t,\vec{x}) &= \exp(-i\omega t)\ \rho(\vec{x}) \\
\vec{j}(t,\vec{x}) &= \exp(-i\omega t)\ \vec{j}(\vec{x})
\end{aligned}$$

In diesem Fall bedeutet Ladungserhaltung:

$$i\omega\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

(EW) Abstrahlung einer lokalisierten Ladungs- & Stromverteilung

S. 92ff.

Aussage: Gegeben sei eine um den Punkt $\vec{x}_0$ herum lokalisierte Ladungs- und Stromverteilung mit Durchmesser d und $r := \vec{x} - \vec{x}_0$ als Abstand von dieser Verteilung.
Den Bereich $r \gg d$ bezeichnet man als *Fern-* oder *Strahlungszone*. Für die retardierten Potentiale gilt hier:

1. Differentiation von $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ liefert Feldstärken, die wie $\frac{1}{r^2}$ für $r \to \infty$ abfallen
2. Differentiation der Retardierung liefert Feldstärken, die wie $\frac{1}{r}$ für $r \to \infty$ abfallen

Man führt nun ein Vektorfeld q ein mit

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\cdot\vec{q})(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\ \rho(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}') \\
\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\ \vec{j}(t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c,\vec{x}')
\end{aligned}$$

und erhält (sei $\vec{r}_0 := \frac{\vec{r}}{r}$):

$$\begin{aligned}
\phi_{St}(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{q})(t,\vec{x}) \\
\vec{A}_{St}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{\kappa c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}(t,\vec{x}) \\
\vec{E}_{St} &= \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\vec{q}}{\partial t^2}(t,\vec{x})\times\vec{r}_0\right)\times\vec{r}_0 \\
\vec{B}_{St} &= \frac{1}{\kappa c^3}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\vec{q}}{\partial t^2}(t,\vec{x})\times\vec{r}_0\right) \\
\vec{S}_{St} &= \frac{\epsilon_0}{c^3}\frac{1}{r^2}\left(\mathcal{R}e\frac{\partial^2\vec{q}}{\partial t^2}(t,\vec{x})\times\vec{r}_0\right)^2\vec{r}_0
\end{aligned}$$

(EW) Abstrahlung mit periodischer Zeitabhängigkeit

S. 94f.

Aussage: Bei periodischer Zeitabhängigkeit erhält man für das Vektorfeld $\vec{q}(t, \vec{x})$:

$$\vec{q}(t, \vec{x}) = \frac{i}{4\pi\epsilon_0\omega} \int d^3x' \; \vec{j}(\vec{x}') \; \exp(-i\omega(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))$$

Ist die Wellenlänge λ groß gegen die Ausdehnung der strahlenden Ladungs- und Stromverteilung, so unterscheidet man:

1. Nahzone ($d \ll r \ll \lambda$): Retardierung vernachlässigbar, Multipolentwicklung wie im statischen Fall

2. Fernzone ($d \ll \lambda \ll r$):

$$\vec{q}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{p}(t_{ret}) + \frac{1}{\kappa c} \vec{m}(t_{ret}) \times \vec{r}_0 + \frac{1}{6c} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}(t_{ret}) \vec{r}_0 + \dots \right\}$$

mit dem üblichen elektrischen Dipolmoment $\vec{p}$, Quadrupolmoment q_{ij} und magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$ und $t_{ret} := t - \frac{r}{c}$

(EW) Hertzscher Dipol

S. 96

Aussage: Im Fernbereich $d \ll \lambda \ll r$ erhält man in Dipolnäherung für das Vektorfeld $\vec{q}$:

$$\vec{q}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}(t_{ret})$$

Der *Hertzsche Dipol* beschreibt eine periodisch schwingende Ladungsverteilung:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \exp(-i\omega t)$$

Für den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors und die mittlere Strahlungsleistung erhält daher

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{S}_{St} \right\rangle &= \frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2} |\vec{p}_0 \times \vec{r}_0|^2 \vec{r}_0 = \frac{\omega^4 |\vec{p}_0|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\theta \; \vec{r}_0 \\ \overline{W_{St}} &= \frac{\omega^4 |\vec{p}_0|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \sin^2\theta = \frac{\omega^4 |\vec{p}_0|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

Beachte: ω^4-Abhängigkeit der Frequenz und $\sin^2\theta$-Abhängigkeit der Intensität.
Im Falle elektrischer Quadrupolstrahlung ergibt sich z.B. eine ω^6-Abhängigkeit.

(EW) Strahlungsleistung einer langsam bewegten Punktladung

S. 97

Aussage: Im Falle einer langsam ($\vec{v} \ll c$) bewegten Punktladung läßt sich die Dipolnäherung anwenden

$$\vec{p} = q\vec{r}', \qquad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = q\vec{v}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2} = q\vec{a}$$

Dann erhält man für die Strahlungsleistung die sogenannte *Larmorsche Formel*, derzufolge die Abstrahlung nur von der Beschleunigung, nicht von der Geschwindigkeit abhängt:

$$W_{St}(t) = \frac{q^2 \vec{a}(t_{ret})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

(EW) Streuung elektromagnetischer Wellen an kleinen Objekten

S. 98ff.

Aussage: Eine ebene Welle

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = E_0\ e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\vec{\epsilon} \qquad \text{mit} \quad \vec{\epsilon}\cdot\vec{k} = 0$$

streue an einem kleinen Objekt der Ausdehnung $d \ll \lambda$, was zu einer Dipolpolarisation von

$$\vec{p}(t,\vec{x}) = 4\pi\epsilon_0\ \chi(\omega)E_0\ e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\vec{\epsilon}$$

am Ort $\vec{x}_0$ führt. Dabei heißt $\chi(\omega)$ *dieletrische Suzeptibilität* mit der Dimension eines Volumens. Dann ergibt sich die Energiestromdichte der gestreuten Wellen (gestrichene Größen) im zeitlichen Mittel zu

$$\left\langle \vec{S'} \right\rangle = \frac{\epsilon_0}{2c^3}\frac{\omega^4 |\ \chi(\omega)|^2\ E_0^2}{r^2}|\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon'^{\star}}|^2\vec{n}'$$

und für den *differentiellen Wirkungsquerschnitt* erhält man mit dem Streuwinkel $\cos\theta := \vec{n}\cdot\vec{n'}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4|\chi(\omega)|^2}{2c^4}(1+\cos^2\theta)$$

und für den *totalen Wirkungsquerschnitt*

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi\omega^4|\chi(\omega)|^2}{3c^4}$$

Beispiele:

- leitende Kugel vom Radius R ($\Rightarrow \chi(\omega) = R^3$):

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi\omega^4 R^6}{3c^4}$$

- durch Welle angeregtes Elektron:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m\omega^2} \\ \Rightarrow \qquad \sigma_{tot} &= \frac{8\pi r_0^2}{3} \qquad \text{mit} \quad r_0 := \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} \end{aligned}$$

dabei heißt r_0 *Thomson-Radius* oder *klassischer Elektronenradius*.