Kartei-Sammlung Funktionentheorie

von Christof Degenhart

13. Juni 1996

Definition: **Körper der komplexen Zahlen**

S. 2

Aussage $\mathbb{C}$ ist definiert als $\mathbb{R}^2$ mit folgender Addition und Multiplikation:
$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
dem neutralen Element $(1, 0)$: $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$
und $i := (0, 1)$.
Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi(a) = (a, 0)$ ist injektiv.
Darstellung in der komplexen Zahlenebene: $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ mit $\varphi =: \arg z$

Definition: **Konjugation und Betrag**

S. 3f.

Aussage Konjugierte von $z = x + iy$: $\bar{z} := x - iy$
Betrag von z: $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Ferner gilt: $-|z| \leq \Re z \leq |z|$ und $-|z| \leq \Re z \leq |z|$.

Definition: **Drehstreckung**

S. 6

Aussage Die Abbildung $z \to wz$ mit $w, z \in \mathbb{C}$ entspricht einer Drehung um $\arg w$ und einer Streckung um $|w|$.

Definition: **ϵ-Umgebung**

S. 7

Aussage Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$, dann heißt

$$U_\epsilon(z_0) := D_\epsilon(z_0) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

Definition: **Bereich**

S. 7

Aussage Ein Bereich ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, d.h.

$$\forall z \in U \quad \exists \quad \epsilon > 0 : U_\epsilon(z) \in U$$

Definition: **Komplement einer Menge**

S. 7

Aussage $\neg M := \{z \in \mathbb{C} : z \notin M\}$

Definition: **Abgeschlossene Menge**

S. 8

Aussage M abgeschlossen $:\Leftrightarrow \neg M$ offen
z.B. sind $\emptyset$ und die gesamte Ebene abgeschlossen (und gleichzeitig offen)

Definition: **Relativ offen (abgeschlossen)**

S. 8

Aussage U' relativ offen $:\Leftrightarrow U' = U \cap M$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $M \subset \mathbb{C}$ beliebig
analog: relativ abgeschlossen

Definition: **Innenpunkte einer Menge**

S. 8

Aussage Die größte offene Teilmenge von M:

$$\overset{\circ}{M} := \bigcup \{U : U \subset M, U \text{ ist offen}\}$$

Definition: **Adhärenzpunkte einer Menge**

S. 8

Aussage Die kleinste abgeschlossene Obermenge von M:

$$\bar{M} := \bigcap \{A : A \supset M, A \text{ ist abgeschlossen}\}$$

Definition: **Dichte Menge**

S. 8

Aussage Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt dicht $:\Leftrightarrow \bar{N} \supset M$
$\Leftrightarrow$ jede Umgebung eines Punktes von M trifft noch die Menge N
z.B. ist $\mathbb{Q}^2 \cap U$ dicht in U

Definition: **Diskrete Menge**

S. 8

Aussage N heißt diskret in M $:\Leftrightarrow \forall z \in M \; \exists \; U_\epsilon(z) : U_\epsilon(z) \cap N$ endlich (bzw. leer)

Definition: **Umgebung einer Menge**

S. 8

Aussage M sei Umgebung der Menge N $:\Leftrightarrow N \subset \overset{\circ}{M}$

***Definition:* Rand einer Menge**

S. 8

Aussage $\partial M := \bar{M} - \mathring{M}$

***Definition:* Grenzwert (Limes) einer Folge**

S. 8

Aussage $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *Grenzwert* der Folge $z_\nu :\Leftrightarrow$ in jeder Umgebung von z_0 liegen *fast alle* z_ν (d.h. alle bis auf endlich viele)
Schreibweise für (z_ν) *konvergiert* gegen z_0:

$$z_\nu \to z_0 \qquad \text{oder} \qquad z_0 = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty} |z_\nu - z_0| = 0$$

***Satz:* Cauchysches Konvergenzkriterium**

S. 8

Aussage $z_0 = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ \nu_0 : \forall \nu, \mu \geq \nu_0$ gilt $|z_\nu - z_\mu| < \epsilon$
Beweis s. Analysis-Bücher

***Definition:* Häufungspunkt einer Folge**

S. 9

Aussage z_0 heißt *Häufungspunkt* der Folge $(z_\nu) :\Leftrightarrow$ in jeder Umgebung von z_0 liegen unendlich viele Folgenglieder z_ν

***Definition:* Häufungspunkt einer Menge**

S. 9

Aussage z_0 heißt *Häufungspunkt* der Menge $M :\Leftrightarrow$ in jeder Umgebung von z_0 liegen noch unendliche viele Punkte von M

***Definition:* Kompakte Teilmenge**

S. 9

Aussage $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt* $:\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche Teilüberdeckung

***Definition:* Beschränkte Menge**

S. 9

Aussage K *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists\ R > 0 : |z| \leq R\ \forall z \in K$

***Satz:* Heine-Borel**

S. 9

Aussage Für $K \subset \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. K kompakt
2. K abgeschlossen und beschränkt
3. jede Folge (z_ν) in K hat Häufungspunkte in K
4. jede Folge (z_ν) in K hat konvergente Teilfolgen, der Limites wieder in K liegen

Beweis s. Analysis-Bücher

***Satz:* Absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen**

S. 9

Aussage Ist $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen, so gilt

$$\bigcap_{\nu\in N} K_\nu \neq \emptyset$$

Beweis Sei z_ν jeweils in K_ν; $(z_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ hat Häufungspunkt $z_0 \in K_1$, der auch Häufungspunkt von $(z_\nu)_{\nu=\mu,\mu+1,\ldots}$ in K_μ ist $\Rightarrow z_0 \in K_\mu$ und daher

$$z_0 \in \bigcap_{\mu\in\mathbb{N}} K_\mu$$

***Definition:* Rationale Funktion**

S. 11

Aussage

$$f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \qquad p, q \text{ Polynome}, q(z) \neq 0$$

***Definition:* Graph einer komplexen Funktion**

S. 12

Aussage Als *Graph* der Funktion $w = f(z)$ bezeichnet man die Punktmenge

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = f(z)\} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

Definition: **Stetige Funktion**

S. 12

Aussage $f : M \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in M$ *stetig* $:\Leftrightarrow \forall\ V := U_\epsilon(w_0)$ mit $w_0 := f(z_0)\ \exists\ U := U_\epsilon(z_0)$, so daß

$$f(U \cap M) \subset V$$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ mit

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \qquad \forall z \in M \text{ mit } |z - z_0| < \delta$$