Kartei-Sammlung Funktionentheorie

nach dem Buch von W. Fischer & I. Lieb, 6. Aufl.

von Christof Degenhart (degenhac@mail.ruf.uni-freiburg.de)

15. Juli 1996

Diese Sammlung von Kartei-Karten entstand in der Vorbereitung auf die Mathe-Hauptdiploms-prüfung bei Prof. Spilker. Es sind Teile des Buches weggelassen worden, die Herr Spilker entweder noch nie gefragt hat oder ich nicht für wichtig erachtet habe.

Satz: **Folgenkriterium für Konvergenz**

S. 13

Aussage $\forall (z_\nu) \to z_0$ gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = f(\lim_{\nu\to\infty} z_\nu)$$

Beweis s. Analysis-Bücher

Definition: **Grenzwert (Limes) von Funktionen**

S. 13

Aussage Sei $f : M \to \mathbb{C}$ und z_0 Häufungspunkt von M, dann heißt

$$c := \lim_{z\to z_0} f(z)$$

Grenzwert von f für $z \to z_0$, wenn $\exists\ F : (M \cup \{z_0\}) \to \mathbb{C}$ mit $F(z_0) = c$ und $F|(M - \{z_0\}) = f$

Satz: **Stetige Abbildung einer kompakten Menge**

S. 14

Aussage f stetig auf K, K kompakt; dann ist

- $f(K)$ kompakt
- $\mathcal{R}ef, \mathcal{I}mf, |f|$ beschränkt auf K
- $\mathcal{R}ef, \mathcal{I}mf, |f|$ nehmen ihr Maximum & Minimum an

Beweis s. Analysis-Bücher

Satz: **Minimum der stetigen Abbildung einer kompakten Menge**

S. 14

Aussage f stetig auf K, K kompakt, $f(z) \neq 0\ \forall z \in K$; dann $\exists\ \delta \geq 0$, so daß

$$|f(z)| \geq \delta$$

Beweis $1/f$ ist auf K stetig und aufgrund von Satz 3.1 (S. 14) über die stetige Abbildung einer kompakten Menge beschränkt

Definition: **Weg**

S. 14

Aussage Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{C}$ heißt *Weg* in M.
$\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $\gamma(b)$ *Endpunkt*

Definition: **Verbindbarkeit von Punkten**

S. 14

Aussage $z_1, z_2 \in M$ heißen *verbindbar* $:\Leftrightarrow\ \exists$ Weg γ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$.
Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Definition: **Wegkomponente**

S. 14

Aussage Die Äquivalenzklassen der Verbindbarkeitsrelation heißen *Wegkomponenten*

Definition: **Zusammenhängende Menge**

S. 14

Aussage M heißt *zusammenhängend* $:\Leftrightarrow\ \exists\ z_1, z_2 \in M, z_1, z_2$ verbindbar

Definition: **Gebiet**

S. 14

Aussage *Gebiet* := zusammenhängende offene Menge (= zusammenhängender Bereich)

Satz: **Stetige Abbildung einer zusammenhängenden Menge**

S. 15

Aussage Sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und M zusammenhängend, dann ist $f(M)$ wieder zusammenhängend

Beweis s. Analysis-Bücher

Satz: **Äquivalenzaussagen für Gebiete**

S. 15

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C}$ Bereich; dann ist äquivalent

1. G Gebiet
2. aus $G = G_1 \cup G_2; G_1, G_2$ offen & punktfremd folgt $G_1 = G$ oder $G_2 = G$
3. aus $G_1 \subset G$ offen & relativ-abgeschlossen folgt $G_1 = G$ oder $G_1 = 0$

Beweis s. Analysis-Bücher

Definition: **Komplexe Differenzierbarkeit**

S. 15

Aussage Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$
f heißt in z_0 *komplex differenzierbar* $:\Leftrightarrow \exists\ \Delta : U \to \mathbb{C}, \Delta$ stetig, so daß

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \qquad \forall z \in U$$

$\Delta(z_0)$ heißt *Ableitung* von f in z_0

Definition: **Holomorphe Funktion**

S. 16

Aussage $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, U Bereich
f heißt *in z_0 holomorph* $:\Leftrightarrow f$ in $U_\epsilon(z_0)$ komplex differenzierbar

Satz: **Stetigkeit komplex differenzierbarer Funktionen**

S. 17

Aussage f in z_0 komplex differenzierbar $\Rightarrow f$ in z_0 stetig

Beweis Ergibt sich aus der Definition der komplexen Differenzierbarkeit:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \qquad \forall z \in U$$

Satz: **Inverses einer komplex differenzierbaren Funktion**

S. 17

Aussage $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar und $f(z_0) \neq 0$
Dann ist

- $\frac{1}{f}$ in $U_\epsilon(z_0)$ erklärt
- $\frac{1}{f}$ in z_0 komplex differenzierbar
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$

Beweis f in z_0 stetig $\Rightarrow f \neq 0$ in $V := U_\epsilon(z_0) \Rightarrow\ \exists\ z \in V$ mit

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = -\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z)f(z_0)} = -\frac{\Delta(z)}{f(z)f(z_0)}(z - z_0) =: E(z)(z - z_0)$$

$E(z)$ ist in z_0 stetig und hat den Wert

$$E(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Definition: **Biholomorphe Abbildung**

S. 18

Aussage $f : U \to V$ heißt *biholomorph* $:\Leftrightarrow U, V \subset \mathbb{C}$ Bereiche; f, f^{-1} holomorph; f bijektiv

Satz: **Ableitung einer biholomorphen Abbildung**

S. 18

Aussage $f : U \to V$ biholomorph $\Leftrightarrow U, V \subset \mathbb{C}$ Bereiche; f holomorph & bijektiv; f^{-1} stetig;
$f'(z) \neq 0\ \forall z \in U$:
Außerdem gilt dann:

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad w = f(z)$$

Beweis Mit $z = f^{-1}(w)$ und der Kettenregel ergibt sich

$$1 = \frac{d}{dw}w = \frac{d}{dw}\left(f(z)\right) = \frac{d}{dw}\left(f\left(f^{-1}(w)\right)\right) = f'(z)\left(f^{-1}\right)'(w)$$

Definition: **Reelle Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion**

S. 19

Aussage $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *reell differenzierbar* $:\Leftrightarrow \exists$ stetige $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z) \qquad \forall z \in U$$

Die Werte

$$\Delta_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \qquad \Delta_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

heißen *partielle Ableitungen* von f nach $x = \mathcal{R}ez$ bzw. $y = \mathcal{I}mz$

Definition: **Wirtinger-Ableitungen**

S. 20

Aussage Die Werte

$$f_z(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - if_y(z_0)\right),$$
$$f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right)$$

heißen *Wirtinger-Ableitungen* von $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in z_0

Satz: **Reelle Differenzierbarkeit und Wirtinger-Ableitungen**

S. 20

Aussage $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist reel differenzierbar $\Leftrightarrow \exists$ in z_0 stetige $f_z(z), f_{\bar{z}}(z)$ mit

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z)(\bar{z} - \bar{z}_0) \qquad \forall z \in U$$

wobei $f_z(z_0)$ und $f_{\bar{z}}(z_0)$ die (eindeutigen) Wirtinger-Ableitung sind:

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - if_y(z_0)\right),$$
$$f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right)$$

Beweis "$\Rightarrow$": f in z_0 reell differenzierbar
Mit $x - x_0 := \frac{1}{2}(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0)$ und $y - y_0 := -\frac{i}{2}(z - z_0 + \bar{z} + \bar{z}_0)$ ergibt sich die Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) + (\bar{z} - \bar{z}_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z))$$

"$\Leftarrow$": $f(z) = f(z_0) + f_z(z)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z)(\bar{z} - \bar{z}_0)$
Mit $z - z_0 := x - x_0 + i(y - y_0)$ und $\bar{z} - \bar{z}_0 := x - x_0 - i(y - y_0)$ ergibt sich die Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)(f_z(z) + f_{\bar{z}}(z)) + (y - y_0)i(f_z(z) - f_{\bar{z}}(z))$$

Satz: **Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen**

S. 21

Aussage Für $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. f in z_0 komplex differenzierbar
2. f in z_0 reell differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \qquad \textit{(Cauchy-Riemannsche DGLn)}$$

Beweis "$\Rightarrow$": f in z_0 komplex differenzierbar
Also $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$. Sei $A_1 := \Delta, A_2 := 0$ ergibt sich

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)A_2(z)$$

"$\Leftarrow$": $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)A_2(z)$, $A_2(z_0) = f_{\bar{z}}(z_0) = 0$
Es ist

$$\Delta(z) := A_1 + \begin{cases} A_2 \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} & \text{für} z \neq z_0 \\ 0 & \text{für} z = z_0 \end{cases}$$

stetig in z_0 mit $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$

Bemerkung: **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen für Real- & Imaginärteil**

S. 22

Aussage Für komplex differenzierbares $f = g + ih$ gilt:

$$g_x = h_y$$
$$g_y = -h_x$$

Satz: **Ableitung einer holomorphen Funktion identisch Null**

S. 22

Aussage f auf Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph und $f' \equiv 0$, dann ist

f konstant

Beweis Folgt aus $f_z = f' \equiv 0$ und $f_{\bar{z}} \equiv 0$

Definition: **Konvergenz einer unendlichen Reihe**

S. 26

Aussage $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, a_\nu \in \mathbb{C}$ heißt *konvergent gegen* $a :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = a$, d.h. die Folge der Partialsummen gegen a konvergiert

Definition: **Absolute Konvergenz einer Reihe**

S. 26

Aussage $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent
Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

Definition: **Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen**

S. 26

Aussage $(f_\nu) : M \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *punktweise konvergent gegen f*

$$:\Leftrightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z) = f(z) \quad \forall z \in M$$

Definition: **Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen**

S. 27

Aussage $(f_\nu) : M \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent gegen f*
$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \nu_0$, so daß

$$|f_\nu(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0 \quad \forall z \in M$$

Definition: **Lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen**

S. 27

Aussage $(f_\nu) : M \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt auf dem Bereich $U \subset M$ *lokal gleichmäßig konvergent gegen f*
$:\Leftrightarrow (f_\nu)$ in jeder Umgebung $U_\epsilon(z_0) \subset U$ um $z_0 \in U$ gleichmäßig konvergent gegen f

Satz: **Gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen**

S. 27

Aussage Sei U offen; die Folge stetiger f_ν konvergiere auf U gleichmäßig gegen f
$\Rightarrow f$ stetig auf U

Beweis s. Analysis-Bücher

Bemerkung: **Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen**

S. 27

Aussage $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ konvergiert gleichmäßig auf $M \subset \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \nu_0$, so daß

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} f_\nu(z)\right| < \epsilon \qquad \forall m \geq n \geq \nu_0, \quad \forall z \in M$$

Bemerkung: **Majorantenkriterium**

S. 27

Aussage Sei $f_\nu : M \to \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \ni a_\nu \geq 0$ und gelte

$$|f_\nu(z)| \leq a_\nu \qquad \forall \nu, \quad \forall z \in M$$

$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ absolut und gleichmäßig konvergent auf M

Bemerkung: **Geometrische Reihe**

S. 28

Aussage Die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} \qquad \text{für } |z| < 1$$

konvergiert für $|z| < 1$, divergiert sonst

Satz: **Konvergenz der Potenzreihe**

S. 28

Aussage Die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

konvergiert *absolut* und *lokal gleichmäßig*

- auf ganz $\mathbb{C}$, oder
- innerhalb des Konvergenzradius $r \in [0, +\infty[$ (und divergiert außerhalb)

Beweis wird nicht gegeben (mit Hilfe des Abelschen Lemmas und der Formel von Cauchy-Hadamard)

Satz: **Berechnung des Konvergenzradius einer Potenzreihe**

S. 28f.

Aussage Nach der *Formel von Cauchy-Hadamard* läßt sich der Konvergenzradius $r \in [0, +\infty[$ einer Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

bestimmen als

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Beweis wird nicht gegeben

Bemerkung: **Reihendarstellung von $\sin \mathbf{z}$ und $\cos \mathbf{z}$**

S. 31

Aussage Es ist

$$\sin z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}$$

$$\cos z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}$$

Bemerkung: **Exponentialdarstellung von $\sin z$ und $\cos z$ und $\sinh z$ und $\cosh z$**

S. 32

Aussage Es folgt aus $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$
$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

Satz: **Vertauschen von Betrag und Integral**

S. 37

Aussage Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Beweis Betrachte $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}e\left(e^{is}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

setze nun $s := -\arg \int_a^b f(t)dt$; dann ist

$$\text{reel und positiv} \;\to\; e^{is}\int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

da $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $\varphi := \arg z$

Definition: **Integrationsweg**

S. 38

Aussage Ein in $U \subset \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \to U$ heißt *Integrationsweg*

Definition: **Parametertransformation**

S. 41

Aussage Eine *Parametertransformation* ist eine surjektive, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to J$ (I, J kompakt) mit

$$\varphi'(t) > 0$$

Definition: **Kette**

S. 43

Aussage Eine *Kette* ist eine endliche Linearkombination von Integrationswegen

$$\Gamma := \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k \qquad n_k \in \mathbb{N}$$

Bemerkung: **Quadrat einer Reihe**

S. -

Aussage Es ist

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}$$

Definition: **Stammfunktion von f**

S. 45

Aussage Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $U \subset \mathbb{C}$ offen
$F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f
$:\Leftrightarrow F$ holomorph und $F' = f$

Definition: **Lokale Stammfunktion von f**

S. 45

Aussage Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $U \subset \mathbb{C}$ offen
$F : U \to \mathbb{C}$ heißt lokale *Stammfunktion* von f
$:\Leftrightarrow \forall z \in U \; \exists \, U_\epsilon(z) : f|U_\epsilon(z)$ hat Stammfunktion

Satz: **Kurvenintegral über $\mathbf{f = F'}$**

S. 45

Aussage Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und besitze eine Stammfunktion F

$$\Rightarrow \qquad \oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Beweis Für $\gamma : [a, a] \to U$ ist $\oint_\gamma f(z)dz = F(a) - F(a) = 0$

Satz: **Verschwinden jedes geschlossenen Kurvenintegrals**

S. 46

Aussage Sei G Gebiet, f auf G stetig und gelte

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \text{für geschlossene } \gamma$$

Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

Beweis Sei

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta \qquad \gamma_z := \text{'Weg von } a \text{ nach } z\text{'}$$

Dann ist $F(z_0) - F(z) = \int_0^1 f\big(z_0 + t(z - z_0)\big)(z - z_0)dt =: A(z)(z - z_0)$; also $A(z_0) = f(z_0)$; $A(z)$ ist stetig in z_0, da f stetig und

$$|A(z) - A(z_0)| \leq \max_{t\in[0,1]} \left|f\big((z_0) + t(z - z_0)\big) - f(z_0)\right|$$

Satz: **Verschwinden des Kurvenintegral über abgeschlossene Dreiecke**

S. 47

Aussage Sei G konvexes Gebiet; $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und gelte

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \qquad \forall \text{ abgeschlossene } \Delta \subset G$$

$\Rightarrow$ f hat Stammfunktion F

Beweis Sei

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta \qquad \gamma_z := [a, z]$$

dann folgt der Beweis wie im Satz über das Verschwinden jedes geschlossenen Kurvenintegrals

Satz: **Vertauschung von Limes und Integral**

S. 53

Aussage Sei γ ein Integrationsweg, die f_ν seien auf γ stetig & gleichmäßig konvergent gegen f

$$\Rightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty} \int_\gamma f_\nu(z)dz \;=\; \int_\gamma f(z)dz$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)\right) dz \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_\gamma f_\nu(z)dz$$

Beweis Es ist

$$\left|\int_\gamma f_\nu(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f_\nu(z) - f(z))\, dz\right| \leq L(\gamma) \max_\gamma |f_\nu(z) - f(z)|$$

da die f_ν gleichmäßig gegen f konvergieren, folgt die erste Behauptung.
Die zweite Behauptung ergibt sich daraus zusammen mit der Tatsache, daß sich jede Reihe als Folge darstellen läßt

Satz: **Holomorphie der Potenzreihe**

S. 54f.

Aussage Jede Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

ist innerhalb des Konvergenzkreises $D_R(z_0)$ holomorph und es gilt

$$Q(z) := P'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$$

Beweis Skizze: $(z - z_0)^\nu$ hat eine Stammfunktion $\Rightarrow \oint_\gamma (z - z_0)^\nu = 0$ für $\gamma \in D_R$

$$\Rightarrow \quad \oint_\gamma Q(z)dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \int_\gamma (z - z_0)^{\nu-1}dz = 0$$

d.h. $Q(z)$ hat eine Stammfunktion

$$\Rightarrow \quad \int_{[z_0,z]} Q(\zeta)d\zeta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \int_{[z_0,z]} (\zeta - z_0)^{\nu-1}d\zeta =: P(z)$$

Hierbei wurde verwendet, daß $Q(z)$ mindestens in D_R konvergiert, was man mit Hilfe des Quotientenkriteriums und des Abelschen Lemmas beweist (s. Buch S. 55)

Satz: **Integrale, die von Parametern abhängen**

S. 55

Aussage Sei γ Integrationsweg, $f : \mathrm{Sp}\,\gamma \times M \to \mathbb{C}$ stetig, $M \subset \mathbb{R}^n$, dann

1. $F(\vec{x}) = \int_\gamma f(\zeta, \vec{x})\; d\zeta$ stetig auf M
2. M offen, f besitzt stetige partielle Ableitung nach x_ν
   $\Rightarrow F$ stetig partiell differenzierbar nach x_ν mit
   $$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(\vec{x}) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\zeta, \vec{x})\; d\zeta$$
3. $M \subset \mathbb{C}$ offen, f auf M holomorph in z
   $\Rightarrow F$ holomorph in M mit
   $$F'(z) = \int_\gamma f_z(\zeta, z)\; d\zeta$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Satz von Goursat**

S. 57

Aussage Sei Δ abgeschlossenes Dreieck, f in $U_\epsilon(\Delta)$ holomorph
$$\Rightarrow \qquad \oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Beweis Skizze: Unterteile Dreieck an den Seitenmitten in vier Dreiecke:
$\Rightarrow \left|\oint_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4 \max_k \left|\oint_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz\right|$
Mit diesem "maximalen" Dreieck mache ich wieder dasselbe und erhalte die Folge
$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots \qquad \text{mit } L(\partial\Delta_n) = 2^{-n} L(\partial\Delta)$$
f ist komplex differenzierbar $\Rightarrow \exists$ stetiges $A(z)$ mit $A(z_0) = 0$ und
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\left\{f'(z_0) + A(z)\right\}$$
Wegen $\oint_{\partial\Delta_n} \left\{f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\right\} dz = 0$ (da lineare Funktion) also
$$\left|\oint_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n \max_{z\in\Delta_n} \left|\oint_{\partial\Delta_n} (z - z_0)A(z)\; dz\right| = \left(L(\partial\Delta)\right)^2 \cdot \max_{z\in\Delta_n} |A(z)|$$
Sei nun $\bigcap_{n\geq 0} \Delta_n =: \{z_0\}$ dann ist $\max|A(z)| = |\Delta A(z_0)| = 0 \Rightarrow$ Behauptung

Satz: **Satz von Goursat mit schwächerer Voraussetzung**

S. 60

Aussage Sei Δ abgeschlossenes Dreieck, f in $U_\epsilon(\Delta)$ holomorph mit eventueller Ausnahme eines Punktes z_0
$$\Rightarrow \qquad \oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Beweis O.B.d.A. sei z_0 Spitze des Dreiecks, sonst unterteile ich es so in Dreiecke, daß z_0 eine Spitze ist. Nun unterteile ich das Dreieck folgendermaßen:
Dann gilt (Satz von Goursat):
$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Delta_2} f(z)dz &= \oint_{\partial\Delta_3} f(z)dz = 0 \\ \Rightarrow \quad \oint_{\partial\Delta} f(z)dz &= \oint_{\partial\Delta_1} f(z)dz \end{aligned}$$
Also
$$\left|\oint_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \max_{z\in\Delta_1} |f(z)|$$
Läßt man nun $z_1 \to z_0$ gehen, folgt, da $f(z)$ auf dem kompakten Δ beschränkt ist, die Behauptung

Satz: **Stetige holomorphe Funktion in konvexem Gebiet**

S. 61

Aussage Sei G konvexes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph (mit event. Ausnahme eines Punktes)
$\Rightarrow \qquad f$ hat Stammfunktion auf G
N.B.: Ist G nicht konvex, so hat f lokale Stammfunktionen

Beweis Folgt aus dem Satz von Goursat

Satz: **Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete**

S. 61

Aussage Sei G konvexes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph (mit event. Ausnahme eines Punktes)
$$\Rightarrow \qquad \oint_\gamma f(z)\; dz = 0 \qquad \text{für geschlossene } \gamma$$

Beweis Folgt aus dem Satz über eine stetige, holomorphe Funktion in einem konvexen Gebiet

Satz: **Cauchy-Integralformel für Kreisscheibe**

S. 62

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $D = D_r(z_0)$ relativ kompakte, offene Kreisscheibe in G

$$\Rightarrow \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z \in D$$

Außerdem sind holomorphe Funktionen *beliebig oft differenzierbar* und die Ableitungen sind wieder *holomorph*. Allgemein gilt daher

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad \forall z \in D$$

Beweis Sei

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z \end{cases}$$

g ist in Umgebung von D stetig und holomorph (mit Ausnahme von z). Der Cauchysche Integralsatz liefert dann

$$0 = \oint_{\partial D} g(\zeta)\, d\zeta = \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

sei nun $h(z) := \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, dann ist $h'(z) := \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} = 0$, da $(\zeta - z)^{-2}$ Stammfunktion $(\zeta - z)^{-1}$ besitzt. $h(z)$ ist daher holomorph in D und dort konstant. Also

$$h(z) = h(z_0) = \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

Satz: **Satz von Morera**

S. 69

Aussage Sei f auf Gebiet G stetig und gilt

$$\oint_{\partial \Delta} f(z)\, dz = 0 \qquad \forall \Delta \subset G \text{ abgeschlossen}$$

$\Rightarrow f$ holomorph.

Beweis Nach dem Satz über das Verschwinden der Kurvenintegrale über abgeschlossene Dreiecke hat f eine Stammfunktion

Satz: **Holomorphie auf diskreter Menge**

S. 69

Aussage Sei G Gebiet, M diskret in G, f in G stetig und in $G - M$ holomorph
$\Rightarrow f$ holomorph in G

Beweis Sei $z_0 \in M \Rightarrow \exists\, U_\epsilon(z_0)$: f hat Stammfunktion auf $U_\epsilon(z_0) \Rightarrow f$ holomorph in z_0

Satz: **Riemannscher Hebbarkeitssatz**

S. 69

Aussage Sei G Gebiet, $z_0 \in G$, f holomorph auf $G - \{z_0\}$; ist weiter f auf $U := U_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$ beschränkt
$\Rightarrow \exists\, \hat{f}$ holomorph auf G mit $\hat{f}|\big(G - \{z_0\}\big) = f$

Beweis Sei

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0) f(z) & \text{für} \quad z \in G - \{z_0\} \\ 0 & \text{für} \quad z = z_0 \end{cases}$$

F ist in $G - \{z_0\}$ holomorph und stetig in z_0, da f in U beschränkt.
$\Rightarrow F$ holomorph in ganz G (ist eine Funktion stetig im Gebiet G und holomorph bis auf diskrete Punkte, so ist sie auf ganz G holomorph) $\Rightarrow \exists\, A$ stetig in z_0 mit

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0) A(z)$$

Also ist $A|\big(G - \{z_0\}\big) = f$ und nach dem Satz über Holomorphie auf diskreter Menge die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f

Satz: **Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen**

S. 72

Aussage Sei f holomorph auf U, U offen
$\Rightarrow \forall\, z_0 \in U$ ist f um z_0 entwickelbar in eine Potenzreihe

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad \text{mit eindeutigen} \quad a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

die mindestens im größten in U gelegenen Kreis $D_R(z_0)$ um z_0 konvergiert.
Für die Kreislinie κ um z_0 mit Radius $r < R$ gilt außerdem

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}$$

Beweis Skizze: Für f gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\kappa \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

welche man um den "Cauchy-Kern" $(\zeta - z)^{-1}$ in eine geometrische Reihe nach Potenzen von $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ entwickelt, die wiederum für festes z gleichmäßig konvergiert (f auf κ beschränkt). Man darf also Integral und Summe vertauschen. Setzt man

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}$$

ergibt sich die Potenzreihe von f um z_0. Die Eindeutigkeitsaussage erhält man durch Differenzieren der ersten Gleichung in $(*)$.

Bemerkung: **Eigenschaften holomorpher Funktionen**

S. 74

Aussage Sei $f : U \to \mathbb{C}$, U offen; dann ist äquivalent

1. f holomorph
2. f besitzt lokale Stammfunktionen
3. f reell differenzierbar, $f_{\bar{z}} = 0$
4. f ist um $z_0 \in U$ in Potenzreihe entwickelbar

Satz: **Darstellbarkeit einer holomorphen Funktion mit n-facher Nulstelle**

S. 74

Aussage Für eine holomorphe Funktion f ist äquivalent

1. f hat eine n-fache Nullstelle in z_0
2. Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet
$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad a_n \neq 0$$
3. $\exists\, g$ in $U_\epsilon(z_0)$ mit
$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad \text{mit} \qquad g(z_0) \neq 0$$

Beweis 1. und 2. sind klar; 3. erhält man aus 2. durch die Definition
$$g(z) := \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu - n}$$

Satz: **Identitätsatz**

S. 74ff.

Aussage Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist äquivalent

1. $f(z) \equiv 0$
2. f hat Nullstelle ∞-er Ordnung in G
3. $f(z) = 0$ auf einer nichtdiskreten Menge $N \subset G$

Wendet man die Aussagen auf $f - g$ an ergibt sich die Äquivalenz von

1. $f(z) \equiv g$
2. $\exists\, z_0 \in G$: $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $f(z) = g(z)$ auf einer nichtdiskreten Menge $N \subset G$

Beweis (Beweis für die obere Aussage)

"1. ⇒ 2." und "1. ⇒ 3." ist klar.

"3. ⇒ 2.":
Sei $z_0 \in G$ Nullstelle und $(z_\mu) \in N$ mit $z_\mu \to z_0$ und $z_\mu \neq z_0$;
f holomorph ⇒ entwickelbar in Taylorreihe um z_0; sei für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$
$$a_\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1$$
dann ist
$$0 = f(z_\mu) = a_n (z_\mu - z_0)^n + a_{n+1} (z_\mu - z_0)^{n+1} + \ldots$$
Multiplikation mit $(z_\mu - z_0)^{-n}$ ergibt
$$0 = a_n + a_{n+1}(z_\mu - z_0) + a_{n+2}(z_\mu - z_0)^2 + \ldots$$
Grenzübergang mit $\mu \to \infty$ ergibt $a_n = 0$; da n beliebig war, ergibt sich die Behauptung

"2. ⇒ 1.":
Sei M die Menge der Nullstellen unendlicher Ordnung.

- M ist laut Voraussetzung *nichtleer*, z.B. $z_1 \in M$
- M ist *offen*, denn in der Taylorentwicklung um z_1 verschwinden alle a_ν im offenen Konvergenzkreis
- M relativ abgeschlossen in G

Da G zusammenhängend, also $M = G$ ⇒ Behauptung

Satz: **Cauchysche Ungleichungen**

S. 78

Aussage Sei f holomorph in einer Umgebung des abgeschlossenen Kreises

$$\{z : |z - z_0| \leq r\}$$

$\Rightarrow \forall \delta : 0 < \delta \leq r$ gilt

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{r}{\delta} \frac{n!}{\delta^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \qquad \forall z : |z - z_0| \leq r - \delta$$

Folgerung für $\delta = r$:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Folgerung für $\delta = \frac{r}{2}$:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq C \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Beweis Die Cauchysche Integralformel liefert für $|\zeta - z| \geq \delta$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{\delta^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Satz: **Satz von Weierstraß**

S. 79

Aussage Sei G Gebiet, (f_ν) holomorph mit $f_\nu \to f$ gleichmäßig auf G
$\Rightarrow f$ holomorph und $f_\nu^{(n)} \to f^{(n)}$ gleichmäßig

Beweis wird nicht gegeben (Holomorphie mit Satz von Morera; gleichmäßige Konvergenz mit Cauchyschen Ungleichungen)

Satz: **Gebietstreue**

S. 80

Aussage G Gebiet, f holomorph, nichtkonstant
$\Rightarrow f(G)$ Gebiet

Beweis f stetig $\Rightarrow f(G)$ zusammenhängend
da f nichtkonstant ist, hat z_0 mit $f(z_0) = w_0$ in $\bar{D}_r(z_0) \subset G$ keine weitere w_0-Stelle, also $\exists\ \epsilon$ mit

$$|f(z) - w_0| \geq 3\epsilon > 0 \qquad \forall z : |z - z_0| = r$$

Zu zeigen ist: $U_\epsilon(w_0) \subset f(G)$ (d.h. $f(G)$ offen)
Sei $w \in U_\epsilon(w_0)$, etwa $|w_0 - w| < \epsilon$ dann ist

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| \geq 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon$$

Für z_0 gilt aber

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \epsilon$$

d.h. $|f(z_0) - w| < |f(z) - w|$, was nach einem Hilfssatz bedeutet, daß $f - w$ mindestens eine Nullstelle in $\bar{D}_r(z_0)$ hat (den Hilfssatz beweist man mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichungen für $n = 0$)

Satz: **Maximumsprinzip**

S. 81

Aussage Sei G Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph

$|f|$ lokales Maximum in $z_0 \in G$ $\Rightarrow$ f konstant in G
G beschränkt, f stetig auf $\bar{G}$ $\Rightarrow$ $|f|$ nimmt Maximum an auf G

Beweis Für $z \in U := U_\epsilon(z_0)$ mit $f(z) = w$ gilt $|w| \leq |f(z_0)|$, also

$$f(U) \subset \{w : |w| \leq |f(z_0)|\}$$

also ist $f(U)$ keine Umgebung von $f(z_0)$. Nach dem Satz über Gebietstreue ist also f konstant in U, nach dem Identitätssatz in ganz G.
Die zweite Behauptung folgt aus der ersten

Definition: **Mittelwerteigenschaft**

S. 82

Aussage Sei U offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig
f hat die *Mittelwerteigenschaft* $:\Leftrightarrow$ $\exists\ R > 0$: $\forall r \leq R$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt \qquad \forall z_0 \in U$$

Holomorphe Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft aufgrund der Cauchyschen Integralformel

Satz: **Allgemeines Maximumsprinzip**

S. 82

Aussage Sei U offen, $f : U \to \mathbb{C}$ besitze Mittelwerteigenschaft, dann gilt:

$$|f| \text{ lokales Maximum in } z_0 \in U \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ konstant in } U_\epsilon(z_0)$$

Beweis wird nicht gegeben (Skizze: die Funktion $g(z) := \mathcal{R}ef(z) - f(z_0)$ hat Mittelwerteigenschaft; man zeigt $g(z_0) = 0$, schließlich $g(z) \equiv 0$ für $|z - z_0| \leq R$ und damit $f(z) \equiv f(z_0)$)

Definition: **Ganze Funktion**

S. 84

Aussage Eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganz*

Satz: **Satz von Liouville**

S. 23 (Jänisch ³1993)

Aussage Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant

Beweis Sei $|f(z)| \leq C$. Da f holomorph, ist f in eine Potenzreihe entwickelbar, für deren Koeffizienten die Cauchy-Abschätzung

$$|a_n| \leq \frac{C}{r^n}$$

gilt. Da f ganz ist, gilt dies für alle $r > 0$, also

$$a_\nu = 0 \quad \forall \nu > 0$$

also $f \equiv a_0$ konstant.

Satz: **Fundamentalsatz der Algebra**

S. 23 (Jänisch ³1993)

Aussage Jedes nichtkonstante Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Beweis Sei $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0, n \geq 1$, dann ist

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{1}{z} a_{n-1} + \ldots + \frac{1}{z^n} a_0 \right)$$

und $\forall M > 0 \; \exists \; r > 0$, so daß

$$|p(z)| \geq M \qquad \forall z \text{ mit } |z| \geq r$$

Hätte $p(z)$ keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{p(z)}$ beschränkt und ganz, also nach dem Satz von Liouville konstant.

Bemerkung: **Zerlegung von Polynomen**

S. 86

Aussage Sei $p(z)$ Polynom vom Grad ≥ 1 mit den Nullstellen $b_1, \ldots, b_r$, die die Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_r$ besitzen.
$\Rightarrow$ $p(z)$ ist darstellbar als

$$p(z) = c \prod_{\rho=1}^{r} (z - b_\rho)^{n_\rho} \qquad \text{mit } c = \text{konstant}$$

Dies ist möglich, da $p(z)$ dem Fundamentalsatz zufolge (mindestens) eine Nullstelle hat. Diese läßt sich als Linearfaktor abspalten. Das sich dabei ergebende Polynom hat wieder (mindestens) eine Nullstelle, usw. Schließlich hat man ganz $p(z)$ in Linearfaktoren zerlegt

Satz: **Hinreichende Bedingung für holomorphe Fortsetzung**

S. 88

Aussage Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ reell

$$f \text{ hat holomorphe Fortsetzung} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ reel-analytisch}$$

(f heißt *analytisch* in x_0 :⇔ $f(x)$ $\forall x$ mit $|x - x_0| < r$ in Potenzreihe entwickelbar)

Beweis wird nicht gegeben

Definition: **Zyklus**

S. 100

Aussage Ein *Zyklus* ist eine geschlossene Kette, d.h. jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist ebensooft Anfangs- wie Endpunkt

Definition: **Umlaufzahl**

S. 101

Aussage Sei Γ Zyklus.

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \operatorname{Sp}\Gamma$$

heißt *Umlaufzahl* von z bezüglich Γ

Satz: **Ganzzahligkeit der Umlaufzahl**

S. 103

Aussage Sei Γ Zyklus, $z \in \mathbb{C} - \operatorname{Sp}\Gamma$
$\Rightarrow n(\Gamma, z)$ ist ganze Zahl

Beweis Skizze:
Sei $\Gamma = \sum_{n=1}^{k} n_k \gamma_k$ und o.B.d.A. $\gamma_k : [0,1] \to \operatorname{Sp}\gamma_k$ (Umparametrisierung ändert das Integral nicht). Sei

$$h(t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{k} n_k \int_0^t \frac{\gamma_k'(s)\ ds}{\gamma_k(s) - z}$$

also $h(1) = n(\Gamma, z)$. Gezeigt wird $e^{2\pi i h(1)} = 1$, indem man zeigt, daß

$$g(t) := e^{-2\pi i h(t)} \prod_k (\gamma(t) - z)^{n_k}$$

konstant ist auf $[0,1]$ und die Produkte für $t = 0$ und $t = 1$ gleich sind

Satz: **Umlaufzahl auf einer Wegkomponente**

S. 104

Aussage Die Umlaufzahl ist auf jeder Wegkomponente von $\mathbb{C} - \operatorname{Sp}\Gamma$ konstant und 0 auf der unbeschränkten Wegkomponente

Beweis Die Funktion $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig in z, kann aber nur ganzzahlige Werte annehmen.
Also ist $n(\Gamma, z)$ konstant auf jeder Wegkomponente.
Da $\operatorname{Sp}\Gamma$ kompakt ist, $\exists\ R > 0$ mit

$$\operatorname{Sp}\Gamma \subset \bar{D}_R(0)$$

Das Komplement $\mathbb{C} - \bar{D}_R(0)$ ist offen, zusammenhängend und unbeschränkt. Wählt man eine Folge (z_ν) mit $\operatorname{dist}(z_\nu, \operatorname{Sp}\Gamma) \to +\infty$, ergibt die Standartabschätzung

$$\lim_{\nu\to\infty} n(\Gamma, z_\nu) = 0$$

Definition: **Nullhomologer Zyklus**

S. 105

Aussage Sei U offen
Ein Zyklus Γ heißt *nullhomolog* in U

$$:\Leftrightarrow \qquad n(\Gamma, z) = 0 \qquad \forall z \in \neg U$$

Die Zykeln Γ_1 und Γ_2 heißen *homolog*, wenn ihre Differenz nullhomolog ist

Satz: **Allgemeine Cauchysche Integralformel & allgemeiner Cauchyscher Integralsatz**

S. 105

Aussage Sei U offen, Γ nullhomologer Zyklus, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph
Dann gilt:

$$\oint_\Gamma f(z)\ dz = 0$$

sowie

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \qquad \forall z \in U - \operatorname{Sp}\Gamma$$

Beweis (Beweis der 2. Aussage, aus der die 1. folgt, für $k = 0$; Ableiten $\Rightarrow \forall\ k \in \mathbb{N}$)
Sei nun

$$h_0(z) := \oint_\Gamma g(\zeta, z)\ d\zeta \qquad \text{mit} \qquad g(\zeta, z) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z \end{cases}$$

Stetigkeit von $\mathbf{g}(\zeta, \mathbf{z})$ in z und ζ: Sei $(\zeta_0, z_0) \in U$, Stetigkeit für $\zeta_0 \neq z_0$ ist klar; sei nun $\zeta_0 = z_0$; es ist $|f'(w) - f'(z_0)| < \epsilon\ \forall w \in U_\epsilon(z_0)$ da f' stetig in z_0

$$\begin{aligned} z = \zeta: \qquad |g(z,z) - g(z_0, z_0)| &= |f'(z) - f'(z_0)| < \epsilon \\ z \neq \zeta: \qquad |g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| &= \left| \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z,\zeta]} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\ dw \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Holomorphie der auf ganz U stetigen Funktion $\mathbf{h_0}$: Sei Δ beliebiges abgeschlossenes Dreieck in U

$$\oint_{\partial\Delta} h_0(z)\ dz \overset{h_0 \text{ stetig}}{=} \oint_\Gamma \left(\oint_{\partial\Delta} g(\zeta, z)\ dz \right) d\zeta \overset{\text{Goursat}}{=} 0$$

Nach dem Satz von Morera folgt die Holomorphie von h_0.
Beschränktheit von $\mathbf{h(z)}$ (also $\mathbf{h(z) \equiv 0}$): Sei

$$\begin{aligned} U_0 &:= \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) = 0\} \\ h(z) &:= \begin{cases} h_0(z) = \oint_\Gamma \frac{\{f(\zeta) - f(z)\}\ d\zeta}{\zeta - z} & \text{für} \quad z \in U \\ h_1(z) := \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{\zeta - z} & \text{für} \quad z \in U_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Da Γ nullhomolog, ist $U \cup U_0 = \mathbb{C}$, also h ganz, aber auch beschränkt

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} L(\Gamma) \max_\Gamma |f|$$

also konstant. Wählt man (z_ν) mit $z_\nu \to \infty$, ergibt sich

$$\lim_{\nu\to\infty} h(z_\nu) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h \equiv 0$$

Herleitung der 1. Aussage aus der 2.: Sei $F(z) := (z - a) f(z)$ mit $a \in U - \operatorname{Sp}\Gamma$

$$0 = n(\Gamma, a) F(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{F(z)\ dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)\ dz$$

Satz: **Änderung der Umlaufzahl in verschiedenen Wegkomponenten**

S. 110

Aussage *"Läufst Du auf einem Integrationsweg (in Richtung des Integrationsweges), so gilt 'rechts vor links', d.h. überquert jemand (von Dir aus gesehen) den Weg von rechts nach links, so erhöht sich seine Umlaufzahl um 1"*

Beweis wird nicht gegeben (elementar, aber fitzelig)

Definition: **Einfach zusammenhängendes Gebiet**

S. 111

Aussage

Gebiet G *einfach zusammenhängend* :⇔ jeder Zyklus nullhomolog

Satz: **Zyklus in kompakter Teilmenge einer offenen Menge**

S. 112

Aussage Sei U offen, $A \subset U$ kompakt
⇒ ∃ Zyklus Γ in $U - A$ mit

$$n(\Gamma, z) = 1 \qquad \forall z \in A$$
$$n(\Gamma, z) = 0 \qquad \forall z \notin U$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Bild eines einfach zusammenhängenden Gebiets**

S. 114

Aussage Sei G einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to G'$ biholomorph
⇒ $G' = f(G)$ einfach zusammenhängend

Beweis Sei $\Gamma' \subset G'$ Zyklus mit $\Gamma' := f(\Gamma)$ und g holomorph auf G', dann ist

$$\oint_{\Gamma'} g(w)\ dw = \oint_{\Gamma} g(f(z))f'(z)\ dz = 0$$

Definition: **Einfach geschlossene Jordankurve**

S. 114

Aussage Die Spur eines stetigen einfach geschlossenen Weges in $\mathbb{C}$ heißt *einfach geschlossene Jordankurve*

Satz: **Spezieller Jordanscher Kurvensatz**

S. 115

Aussage Sei γ einfach geschlossener Integrationsweg, der jede Umgebung von $z_0 \in \operatorname{Sp}\gamma$ lokal zerlege
⇒ $\operatorname{Sp}\gamma$ zerlegt die Ebene in zwei Gebiete, von denen genau eins beschränkt ist, und deren gemeinsamer Rand $\operatorname{Sp}\gamma$ ist

Beweis wird nicht gegeben

Definition: **Logarithmus**

S. 117

Aussage e^z bildet $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{C} - \{0\}$ ab. Sei $z \in \mathbb{C} - \{0\}$
Dann heißt jedes $w \in \mathbb{C}$ mit

$$e^w = z$$

Logarithmus von z

Definition: **Zweig des Logarithmus**

S. 116

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ Gebiet
Dann heißt jedes stetige $f : G \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \forall z \in G$$

Zweig des Logarithmus auf G

Satz: **Definition und Bedingung für Zweig des Arguments**

S. 118

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$
Eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ heißt *Zweig des Arguments* (*Argumentfunktion*)
:⇔ φ stetig, $\forall z \in G$: $\varphi(z)$ Argument von z
Sei nun G Gebiet
auf G ∃ Zweig des Arguments ⇔ auf G ∃ Zweig des Logarithmus

Beweis "⇒": φ Zweig des Arguments ⇒ $z = \log|z| + i\varphi$ Zweig des Logarithmus (log ist dabei der reelle Logarithmus)
"⇐": $f(z)$ Zweig des Logarithmus ⇒ $z = e^{f(z)} = e^{\mathcal{R}ef(z)}e^{i\mathcal{I}mf(z)}$, d.h. $z \mapsto \mathcal{I}mf(z)$ Zweig des Arguments

Satz: Eigenschaften eines Zweigs des Logarithmus

S. 119

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ Gebiet. Dann ist äquivalent:

1. auf G sei f Zweig des Logarithmus
2. f ist holomorph mit $f'(z) = \frac{1}{z}$
3. $\frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion auf G
4. für jeden Zyklus Γ in G gilt: $n(\Gamma, 0) = 0$

Beweis

"1. ⇒ 2.": Sei $w := f(z)$, $w_0 := f(z_0)$, dann ist für $z \neq z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

"2. ⇒ 3.": klar

"2. ⇒ 1.": sei g Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, dann ist $\left(ze^{-g(z)}\right)' = 0$, also $ze^{-g(z)} =$ konstant $= e^c \neq 0$ und $f := g(z) + c$

"3. ⇔ 4.": $\frac{1}{z}$ hat Stammfunktion ⇔ $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 0$ ⇔ $n(\Gamma, 0) = 0$

Definition: Hauptzweig des Logarithmus

S. 120

Aussage Auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}^0_-$ heißt

$$\mathrm{Log}(z) := \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Hauptzweig (oder *Hauptwert*) des Logarithmus.
Die Potenzreihen-Entwicklung von $\mathrm{Log}(z)$ lautet:

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^\nu \qquad \text{für } |z| < 1$$

Satz: Existenz des Logarithmus einer holomorphen Funktion

S. 121

Aussage Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, f holomorph auf G und habe dort keine Nullstellen
⇒ ∃ holomorphes $g : G \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = e^{g(z)} \qquad \forall z \in G$$

Beweis $f(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{f'}{f}$ holomorph mit Stammfunktion h. Es ist

$$\left(f(z)e^{-h(z)}\right)' \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = e^{h(z)+c} \quad (c \text{ passend})$$

Definition: Potenz

S. 123

Aussage Sei $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$a^b := \exp(b \log a)$$

b-te Potenz von a.

Satz: n-te Einheitswurzeln

S. 123f.

Aussage Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Die Gleichung

$$z^n = 1$$

hat genau n komplexe Lösungen, nämlich

$$z = \xi_k \qquad \text{mit} \quad \xi = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: Holomorphe Funktion auf Kreisschreibe

S. 131

Aussage Sei f holomorph auf dem Kreisring $K_a(r, R) = U_1 \cap U_2$, wobei $U_1 := \{z : |z - a| > r\}$ und $U_2 := \{z : |z - a| < R\}$
⇒ ∃ f_1 auf U_1 und f_2 auf U_2, so daß

$$f = f_1 + f_2 \qquad \text{auf} \qquad K_a(r, R) = U_1 \cap U_2$$

Durch die Bedingung

$$\lim_{z \to \infty} |f_1(z)| = 0$$

werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.

Beweis wird nicht gegeben

Definition: **Laurent-Reihe**

S. 133f.

Aussage Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad := \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-a)^{-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

Dabei heißt die erste Reihe auf der rechten Seite *Hauptteil*, die zweite Reihe *Nebenteil* der Laurent-Reihe.
(Lokal) gleichmäßige Konvergenz der Laurent-Reihe soll (lokal) gleichmäßige Konvergenz der beiden Teile bedeuten.

Satz: **Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen auf einer Kreisscheibe**

S. 133

Aussage Sei f holomorph auf $K_a(r,R)$
$\Rightarrow$ f entwickelbar in eine Laurent-Reihe,

- deren Hauptteil lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} - \overline{D_r(a)}$ konvergiert
- deren Nebenteil lokal gleichmäßig auf $D_R(a)$ konvergiert

Die Koeffizienten ergeben sich als

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad r < \rho < R, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Beweis wird nicht geben; die Koeffizientenformel ergibt sich durch gliedweise Integration aus

$$\oint_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}} = a_n \oint_{\kappa(\rho,a)} \frac{dz}{(z-a)} = 2\pi i a_n$$

Definition: **Isolierte Singularität**

S. 136

Aussage Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f definiert & holomorph auf $U_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$
$\Rightarrow$ z_0 heißt *isolierte Singularität*

Definition: **Arten isolierter Singularitäten**

S. 137

Aussage Sei z_0 isolierte Singularität von $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Dann heißt z_0

1. *Hebbare Singularität* $:\Leftrightarrow$ f in $U_\epsilon - \{z_0\}$ beschränkt
2. *Pol* $:\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$
3. *Wesentliche Singularität* $:\Leftrightarrow$ sonst

Satz: **Kriterium für Pol**

S. 137

Aussage z_0 heißt genau dann Pol von f
$\Leftrightarrow$ $\exists$ konstante $M_1, M_2 > 0$, so daß

$$M_1|z-z_0|^{-n} \le |f(z)| \le M_2|z-z_0|^{-n}$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Satz von Casorati-Weierstraß**

S. 138

Aussage z_0 ist genau dann wesentliche Singularität von $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \forall w_0 \in \mathbb{C}\ \exists\ (z_\mu)$ in $U_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$, so daß

$$f(z_\mu) = w_0 \qquad \text{für} \qquad z_\mu \to z_0$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Kriterium für isolierte Singularität mit Hilfe der Laurent-Reihe**

S. 138

Aussage Auf der punktierten Kreisscheibe $K_a(0,\epsilon)$ gelte

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

Dann ist a

1. *hebbare Singularität* $\Leftrightarrow a_\nu = 0\ \forall\ \nu < 0$
2. *Pol n-ter Ordnung* $\Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$ und $a_\nu = 0$ für $\nu < -n$
3. *wesentliche Singularität* $\Leftrightarrow a_\nu \neq 0$ für unendliche viele $\nu < 0$

Beweis wird nicht gegeben

Definition: **Meromorphe Funktion**

S. 141

Aussage Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen; die holomorphe Funktion $f : U - P_f \to \mathbb{C}$ heißt *meromorph* $:\Leftrightarrow$

1. $P_f \subset U$ diskret
2. die Punkte von P_f sind Pole von f

Satz: **Teilbarkeit meromorpher Funktionen**

S. 141

Aussage Sei f meromorph auf U
$\Rightarrow$ f ist lokal (in einer Umgebung) darstellbar als Quotient zweier holomorpher Funktionen

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad \forall z \in U_\epsilon(z) \subset U$$

Beweis wird nicht gegeben

Definition: **Residuum**

S. 144

Aussage Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen; f auf U holomorph (mit Ausnahme isolierter Singularitäten). Dann heißt

$$\mathrm{res}_z = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\kappa(r,z)} f(\zeta)\ d\zeta \qquad (\kappa \text{ umschließt höchstens } z \text{ als Singularität})$$

Residuum von f in $z \in U$.

Bemerkung: **Residuum und Laurentreihe**

S. 145

Aussage Sei f um z in eine Laurentreihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

entwickelt.
$\Rightarrow$ dann gilt

$$\mathrm{res}_z f = a_{-1}$$

wie gliedweise Integration ergibt

Satz: **Residuensatz**

S. 145

Aussage Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen; f auf U holomorph (mit Ausnahme isolierter Singularitäten)
$\Rightarrow$ $\forall$ nullhomologen Zyklus Γ, auf dessen Spur keine Singularität von f liegt, gilt

$$\oint\limits_\Gamma f(\zeta)\ d\zeta = 2\pi i \sum_{z\in U} n(\Gamma, z)\ \mathrm{res}_z f$$

Beweis Die Menge der isolierten Singularitäten z_μ mit $n(\Gamma, z) \neq 0$ ist endlich (diskrete relativ kompakte Teilmenge von U)
Sei M die Menge der Singularitäten mit $n(\Gamma, z) = 0$ und h_μ Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_μ

$$h_\mu(z) = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_{\nu\mu}(z-z_\mu)^\nu$$

h_μ holomorph auf $\mathbb{C} - \{z_\mu\}$ $\Rightarrow$ $f - h_\mu$ holomorph auf $U - M$, also

$$\oint\limits_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{\mu=1}^{m} \oint\limits_\Gamma h_\mu(z) dz,$$

da Γ auch auf $U - M$ nullhomolog.
Die h_μ sind auf $\mathrm{Sp}\,\Gamma$ gleichmäßig konvergent, daher

$$\begin{aligned} \oint\limits_\Gamma h_\mu(z)\ dz &= \sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_{\nu\mu} \oint\limits_\Gamma (z-z_\mu)^\nu\ dz \\ &= a_{-1,\mu} \oint\limits_\Gamma (z-z_\mu)^{-1}\ dz = 2\pi i \cdot n(\Gamma, z_\mu)\ \mathrm{res}_{z_\mu} f \end{aligned}$$

Definition: **Randzyklus**

S. 146

Aussage Der Zyklus Γ heißt *Randzyklus* eines Bereichs $V \subset\subset U$

$$:\Leftrightarrow \qquad \partial V = \mathrm{Sp}\,\Gamma, \qquad n(\Gamma, z) = 1 \quad \text{für} \quad z \in V, \qquad n(\Gamma, z) = 0 \quad \text{für} \quad z \notin \bar{V}$$

Bemerkung: **Residuensatz für Randzyklus**

S. 147

Aussage Sei Γ Randzyklus von $V \subset\subset U$; f auf U holomorph (mit Ausnahme isolierter Singularitäten, von denen keine auf Γ liegt)
$\Rightarrow$ dann gilt

$$\oint\limits_\Gamma f(\zeta)\ d\zeta = 2\pi i \sum_{z\in U} \mathrm{res}_z f$$

Satz: **Berechnung des Residuuums für eine Funktion mit Pol erster Ordnung**

S. 147

Aussage Sei z_0 Pol erster Ordnung von f

- es gilt
$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$
- sei g holomorph in z_0, dann ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = g(z_0)\ \operatorname{res}_{z_0} f$$
- habe $h = \frac{1}{f}$ in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung und sei g holomorph in z_0, so gilt
$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Prinzip vom Argument**

S. 162

Aussage Sei f auf $U \subset \mathbb{C}$ meromorph und nichtkonstant.
⇒ ∀ nullhomologen Zyklus Γ (auf dem keine Singularitäten liegen) gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)\ dz}{f(z) - w} = \sum_\mu n(\Gamma, a_\mu)\ k(a_\mu) - \sum_\nu n(\Gamma, b_\nu)\ k(b_\nu)$$

wobei $a_1, a_2, \ldots$ die w-Stellen, die $b_1, b_2, \ldots$ die Polstellen von f mit Ordnungen $k(a_\mu)$ bzw. $k(b_\nu)$ sind.

Beweis wird nicht gegeben

Satz: **Satz von Rouché**

S. 164

Aussage Seien f, g holomorph in $U \subset \mathbb{C}$ offen; sei Γ Randzyklus von $V \subset\subset U$. Gilt

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \text{auf } \operatorname{Sp}\Gamma$$

⇒ f und g haben gleichviele Nullstellen (Vielfachheit mitgezählt)

Beweis wird nicht gegeben