Lernkartei
Relativistische Astrophysik

(http://www.uni-karlsruhe.de/~um3f/TeX/physik.html)

von Christof Degenhart

nach dem Buch
„*Weiße Zwerge - Schwarze Löcher*“ von R. u. H. Sexl

(erschienen im Verlag Vieweg, 2. Auflage)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (GL)

(GL) Der Grundgedanke der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 5

Aussage: Der *Grundgedanke der allgemeinen Relativitätstheorie* lautet:

> „In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind lokale Inertialsysteme.“

Lokal bedeutet „in kleinen Raum-Zeit-Bereichen“. Diese Aussage mündet in das Einsteinsche Äquivalenzprinzip.

(GL) Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip

S. 8

Aussage: Das *Einsteinsche Äquivalenzprinzip* besagt:

> „Die Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern sind einander äquivalent. Durch Messungen innerhalb eines Labors (d.h. in kleinen Raum-Zeit-Bereichen!) kann man nicht unterscheiden, ob sich dieses in einem Gravitationsfeld befindet oder aus einer anderen Ursache konstant beschleunigt wird.“

Beachte: Hieraus folgt die Äquivalenz von träger und schwerer Masse!

(GL) Eindeutigkeit der Einsteinschen Feldgleichungen

S. 8

Aussage: Die Einsteinschen Feldgleichungen folgen aus dem Äquivalenzprinzip. Allerdings nicht eindeutig. Sie sind jedoch die *einfachsten möglichen* Feldgleichungen. Wichtige andere mit dem Äquivalenzprinzip verträgliche Theorien sind die Skalar-Tensor-Theorie oder die Dicke-Brans-Theorie.

2 Die klassischen Tests der ART (KT)

(KT) Die drei klassischen Tests der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 9

Aussage: Die drei klassischen Tests der allgemeinen Relativitätstheorie sind

1. Die Rotverschiebung:
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{\mathcal{R}}{2R}$$
wobei ΔU die Differenz des Gravitationspotential, R den Radius des Sterns und $\mathcal{R}$ den Schwarzschild-Radius darstellt. Das zweite Gleichheitszeichen gilt nur gegenüber Potential Null. Die Rotverschiebung läßt sich jedoch ohne Kenntnis der ART herleiten.
Die Rotverschiebung ist auf etwa 1% genau vermessen.

2. Die Lichtablenkung:
$$\delta = \frac{2\mathcal{R}}{R}$$
Die Lichtablenkung in der ART ist doppelt so groß wie in der Newtonschen Theorie. Die Lichtablenkung ist auf etwa 1% genau vermessen.

3. Die Perihelverschiebung:
$$\frac{\psi}{2\pi} = 1.5\frac{\mathcal{R}}{r}$$
wobei r der Abstand des Planeten von der Sonne ist. Die Erklärung der fehlenden $43''$ der Periheldrehung des Merkur, die seit 1860 bekannt war, wurde 1915 zum größten Triumph der neuen Theorie der allgemeinen Relativität.

(KT) *Definition:* Schwarzschild-Radius

S. 10

Aussage: Der *Schwarzschild-Radius* $\mathcal{R}$ ist wie folgt definiert:
$$\mathcal{R} := \frac{2GM}{c^2}$$

(KT) Verhältnis Schwarzschild-Radius zu Sternradius

S. 11

Aussage: Das Verhältnis von Schwarzschild-Radius $\mathcal{R}$ zu Sternradius R für die wichtige Größen beträgt:

Erde	$\frac{\mathcal{R}}{R} = 10^{-9}$
Sonne	$\frac{\mathcal{R}}{R} = 10^{-6}$
Weißer Zwerg	$\frac{\mathcal{R}}{R} = 10^{-4}$
Neutronenstern	$\frac{\mathcal{R}}{R} = 0.3$

(KT) Die Rotverschiebung

S. 9ff.

Aussage: Wir betrachten einen Lichtstrahl, der in einem Gravitationsfeld aufsteigt. Dabei leistet er die Arbeit
$$A = m\,\Delta U$$
wobei ΔU die Differenz des Gravitationspotentials darstellt. Ein Photon hat dabei die Masse (nicht Ruhemasse!):
$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$
und kommt oben mit der verminderten Energie E' an:
$$E' = E - A \qquad \Rightarrow \qquad h\nu' = h\nu - \frac{h\nu}{c^2}\Delta U$$
Daraus folgt für den Frequenzunterschied (*Rotverschiebung*) $\Delta\nu := \nu - \nu'$:
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}$$
Das Licht eines Sterns mit Radius R und Gravitationspotential $U(R) = -\frac{GM}{R}$ hat daher an der Erdoberfläche $U \approx 0$ die Rotverschiebung:
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{\mathcal{R}}{2R}$$
wobei $\mathcal{R}$ den Schwarzschild-Radius darstellt.
Im Jahre 1965 gelang es *Pound* und *Snider* die Rotverschiebung von Spektrallinien im Erdschwerefeld mit Hilfe des Mößbauer-Effekts bei einem Höhenunterschied von 20 m zu messen. Bis heute konnte die Genauigkeit des Experiments auf etwa 1% gesteigert werden.

(KT) Mößbauer-Effekt

S. 603f. (Gerthsen, 19. Aufl.)

Aussage: Eine Quelle sendet γ-Strahlung aus. Dazu verwendet man z.B. eine Palladiumfolie, auf der ^{57}Co elektrolytisch abgeschieden wurde. Das ^{57}Co zerfällt in einen angeregten 136 keV-Zustand von ^{57}Fe, der wiederum in einen 14,4 keV-Zustand übergeht. Daher wird eine 122 keV-Linie ausgesandt. Als Absorber dient ein Material von der gleichen Isotopenart, z.B. eine Edelstahlfolie.
Wenn ein Kern γ-Strahlung absorbiert und dann wieder emittiert, geht dem ausgesandten Photon (gegenüber dem absorbierten) der Energiebetrag verloren, den der Kern als kinetische Energie aufnimmt, nämlich (wegen $\vec{p}_\gamma = -\vec{p}_{\mathrm{Kern}}$)

$$E_{\mathrm{Kern}} = \frac{p^2}{2M} = \frac{E^2_{\gamma_{abs}}}{2Mc^2}$$

D.h. die Frequenz des Photons erniedrigt sich um

$$h\Delta\nu = -E_{\mathrm{Kern}} = -\frac{E^2_{\gamma_{abs}}}{2Mc^2} = -\frac{h^2\nu^2}{2Mc^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{2Mc^2}$$

Ein identischer Kern kann nun das γ-Quant nur absorbieren, wenn Frequenz des Quants einer Absorptionslinie des Kern entspricht, die identische ist mit der Emissionslinie wie sie *ohne* Rückstoß läge. Die Verstimmung durch den Rückstoß (typischerweise $E_{\gamma_{abs}} \approx 1$ MeV) reicht aus, um solche „Resonanzabsorption" zunichte zu machen. Ist das absorbierende Atom jedoch in ein Kristallgitter fest eingebaut, kann es den Rückstoß nicht aufnehmen (da es fest ist) und dieser wird auf den Kristall übertragen, der eine viel größere Masse besitzt. Daher ist das Atom praktisch starr und alle Effekte, die sonst durch den Rückstoß bewirkt werden (Linienverbreiterung und -verschiebung), fallen weg und eine Linie von *außerordendlicher Schärfe*

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \leq 10^{-13}$$

wird absorbiert. Die Frequenz der Absorptionslinie kann nun leicht verschoben werden, in dem der Absorber bewegt wird. Nach dem *Dopplereffekt*

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

ändert sich die Frequenz mit der Geschwindigkeit v (das + erhält man, wenn sich der Absorber auf die Quelle zubewegt) und es lassen sich Frequenzen mit einer Genauigkeit von bis zu 10^{-15} messen.
Den Anteil f der rückstoßfreien Emissionsprozesse in einem Kristall bezeichnet man als *Debye-Waller-Faktor*.
Durch die Resonanzabsorption kommt es zu einer kleinen Änderung der Energie der Kernniveaus, der sogenannten *Isomerie-Verschiebung* oder *chemical shift*. Diese besteht darin, daß sich die Energie des Gammaübergangs leicht verändert, weil Grund- und Anregungszustand eine unterschiedliche Ladungsverteilung am Kernort besitzen.

(KT) Die Lichtablenkung

S. 12ff.

Aussage: Die *Lichtablenkung* in der allgemeinen Relativitätstheorie

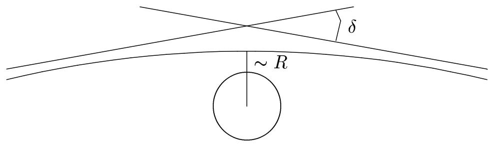
$$\delta = \frac{2\mathcal{R}}{R}$$

ist genau doppelt so groß wie in der Newtonschen Theorie vorhergesagt (das kommt daher, daß sich in der Nähe der Masse die Geschwindigkeit des Lichtstrahls vermindert [Uhren gehen langsamer] und dort außerdem der Raum gekrümmt ist, so daß der Weg des Strahls weiter ist). Sie ist für die Ablenkung am Sonnenrand auf etwa 1% genau vermessen worden:

$$\delta = 1.76'' \pm 0.02''$$

Dies stimmt hervorragend mit der Vorhersage der ART überein:

$$\delta = \frac{2 \cdot 3\mathrm{km}}{7 \cdot 10^5\mathrm{km}} = 1,75''$$



(KT) Die Perihelverschiebung

S. 16ff.

Aussage: Zu den beiden Newtonschen Potentialtermen

$$V^{\mathrm{Newton}}_{\mathrm{eff}} = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

kommt in der allgemeinen Relatitivätstheorie ein Zusatzpotential proportional zu $\frac{1}{r^3}$ hinzu:

$$V^{\mathrm{ART}} = -\frac{GML^2}{r^3}$$

Die Größe der zusätzlichen Drehung, der *Periheldrehung* erhält man aus den Einsteinschen Feldgleichungen zu

$$\frac{\psi}{2\pi} = 1.5\frac{\mathcal{R}}{r}$$

Die Erklärung der fehlenden 43$''$ der Periheldrehung des Merkur, die seit 1860 bekannt war, wurde 1915 zum größten Triumph der neuen Theorie der allgemeinen Relativität.

3 Die gekrümmte Raum-Zeit (RZ)

(RZ) Das Verhalten von Uhren im Gravitationspotential

S. 21ff.

Aussage: Betrachten wir zwei Atome (= Uhren) A und B in den Gravitationspotentialen U_A und U_B und sei $\Delta U = U_B - U_A$. Dann kommt ein von A ausgesandtes Photon bei B rotverschoben an, d.h.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}$$

D.h. wenn in B die Zeit $T_B = 1$s verstreicht, kommen nur $\nu' = \nu - \Delta\nu$ Wellenberge an, also

$$T_A = \left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) T_B = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) T_B$$

Gegenüber einer im Unendlichen ($U = 0$) ruhenden Uhr B zeigt A ($U = -\frac{GM}{R}$) die Zeit

$$T_A = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{2R}\right) T_B$$

an. Dies wurde im Jahre 1971 von *Hafele* und *Keating* nachgemessen, die mit Caesiumuhren im Gepäck zweimal um die Welt flogen, einmal in östlicher Richtung (mit der Erddrehung) und einmal in westlicher Richtung. Dabei mußte zusätzlich die speziell relativistische Zeitverzögerung durch die hohen Fluggeschwindigkeiten

$$t_{SRT} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; t = \left(1 - \frac{v^2}{2c}\right)\; t$$

miteinberechnet werden. Mit Hilfe von Satelliten und Raketen werden heute die Vorhersagen der ART mit einer Genauigkeit von etwa 0.01% vorhergesagt.

(RZ) Das Verhalten von Maßstäben im Gravitationspotential

S. 28ff.

Aussage: Ein im Gravitationsfeld befindlicher Maßstab schrumpft um den Faktor $1 - \frac{\Delta U}{c^2}$, so daß sein Länge

$$L_A = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right)\; L_B$$

beträgt. Speziell ist die Länge eines im Abstand R von einer Masse befindlichen Maßstabes, der im Unendlichen ($U = 0$) die Länge L_B hat, die folgende

$$L_A = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{2R}\right)\; L_B$$

(RZ) Das Shapiro-Experiment

S. 33ff.

Aussage: Im Jahre 1965 führte *I. Shapiro* einen Test der ART durch, der sowohl die Verlangsamung von Uhren als auch die Verlängerung des Lichtweges durch die Raumkrümmung in der Nähe der Sonne überprüfte. Dazu sendete er jeden Tag ein Radarsignal von der Erde zur Venus und maß das reflektierte Signal. Dabei ergab sich in der Zeit, die das Signal für den Hin- und Rückweg brauchte, eine Resonanz um den Tag herum, an dem sich die Sonne genau zwischen Erde und Venus befand. Die effektive Lichtgeschwindigkeit in der Nähe der Sonne (aufgrund der Verlangsamung von Uhren und der Verkürzung von Maßstäben) beträgt:

$$c_{eff} = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{2r}\right)^2 c \approx \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right)\; c$$

Die Laufzeit t_E ergibt sich aus

$$t_E = \int \frac{dx}{c_{eff}} \approx \int \frac{dx}{c} + \frac{\mathcal{R}}{c} \int \frac{dx}{r} = t_N + \Delta t$$

wobei t_N die Laufzeit in der Newtonschen Theorie ist. Die zusätzliche Zeit Δt nach der ART erhält man aus

$$\Delta t = \frac{2\mathcal{R}}{c} \int_{-a_E}^{a_V} \frac{dx}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

wobei a_E bzw. a_V der Abstand der Erde bzw. der Venus vom Sonnenrand und R der Radius der Sonne ist. Der Faktor 2 berücksichtigt Hin- und Rückweg.
Heute führt man entsprechende Experimente mit künstlichen Satelliten als Reflektoren durch und erreicht dabei eine Genauigkeit von etwa 0.1%.
<u>Beachte</u>: Es ist nicht möglich c_{eff} in der Umgebung der Sonne zu messen, da der Effekt durch den Einfluß des Gravitationsfeldes gerade wieder kompensiert wird.

4 Planeten und Sterne (PS)

(PS) Gleichgewichtsbedingung für Sterne

S. 40ff.

Aussage: Bei der Sternentstehung kontrahiert eine Gaswolke aufgrund ihrer Gravitationskraft. Diese Kontraktion kommt zu erliegen, d.h. der Stern ist stabil, wenn der innere Druck und die Gravitationskraft gleich groß sind. Als *Gleichgewichtsbedingung* ergibt sich

$$f(\rho, T) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\mathcal{R}}{R}$$

d.h. wenn das Verhältnis von Druck zu mittlerer Ruheenergiedichte (ρc^2) etwa dem Verhältnis von Schwarzschildradius zu Radius entspricht. Dieses Verhältnis ist durch eine für den Stern charakteristische *Zustandsfunktion* $f(\rho, T)$ gegeben, die einer *Zustandsgleichung*

$$p = p(\rho, T)$$

zu entnehmen ist.

(PS) Der Massendefekt

S. 44ff.

Aussage: Bei der Sternentstehung kontrahiert eine Gaswolke aufgrund ihrer Gravitationskraft. Dabei wird Gravitations-Bindungsenergie frei und die Masse des Gases nimmt aufgrund von $E = mc^2$ ab. Für den Massendefekt ΔM ergibt sich folgende Größenordnung:

$$\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\mathcal{R}}{R}$$

(PS) Supernovae

S. 45

Aussage: Bei Sternen und Weißen Zwergen überwiegt die Kernenergie die Gravitationsenergie. Bei der Bildung von Neutronensternen können einige Prozent der Neutronensternmasse ($M \approx 10^{30}$ kg) in Energie umgewandelt werden ($E \approx 10^{45}$ J), die als Bindungsenergie frei wird. Dies ist die Energiequelle für *Supernovaausbrüche*.

(PS) Größenordnung relativistischer Effekte bei Sternen

S. 45f.

Aussage: Folgende relativistische Effekte entsprechen für Sterne dem Verhältnis von Schwarzschildradius zu Radius:

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\mathcal{R}}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T)$$

dabei stellt δ die Lichtablenkung in der Nähe von Massen dar.

(PS) Normale (nichtentartete) Sterne

S. 46f.

Aussage: Als *normale* oder *nichtentartete* Sterne, bezeichnet man Sterne, die sehr genau durch ein *ideales Gas* angenähert werden können, d.h. es gilt

$$pV = kN_AT$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist, N_A die Avogadro-Zahl und V das Molvolumen, welches man aus

$$\rho = \frac{N_A\mu}{V}$$

bekommt. Die Variable μ stellt die Masse eines Gasmoleküls dar. Daraus ergibt sich für normale Sterne:

$$f(\rho, T) = \frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{\mu c^2} = f(T)$$

d.h. die Zustandsfunktion f hängt nur von der Temperatur des Gases ab.
Sterne bestehen hauptsächlich aus Wasserstoff mit $\mu \approx 1.6 \cdot 10^{27}$ kg, also $\mu c^2 \approx 1$ GeV, und besitzen typische Temperaturen von etwa 10^7 K, was $kT \approx 1$ keV ergibt. Daher sind relativistische Effekte von der Größenordnung

$$\frac{\mathcal{R}}{R} \approx \frac{kT}{\mu c^2} \approx \frac{1\ \text{keV}}{1\ \text{GeV}} \approx 10^{-6}$$

Diese Größenordnung hat kernphysikalische Ursachen, da die Kernphysik die Temperaturen in Sterninnern bedingt.
<u>Beachte</u>: Die Relativistischen Effekte sind unabhängig von der Gravitationskonstante!

(PS) Hertzsprung-Russell-Diagramm

S. 184f. (dtv-Atlas Astronomie)

Aussage: Im *Hertzsprung-Russell-Diagramm* ist die Leuchtkraft der Sterne gegen ihre Farbe (⇒ Temperatur) aufgetragen. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingung für Sterne

$$f(\rho, T) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\mathcal{R}}{R}$$

landen sie auf der sogenannten „Hauptreihe“. Diese hat jedoch einen Knick, da jüngere, massearmere Sterne die Reihe in ihrer Entwicklung noch nicht erreicht haben, so daß man aus der Lage des Knicks, das ungefähre Alter des Sternhaufens bestimmen kann.

(PS) Entstehung eines Roten Riesens

S. 48

Aussage: Bei einem normalen Stern besteht ein Gleichgewicht zwischen dem Temperaturdruck, der durch den Kernbrennstoff erzeugt wird, und der Gravitationskraft, so daß

$$\frac{kT}{\mu c^2} \approx \frac{\mathcal{R}}{R} \qquad (\star)$$

Irgendwann ist jedoch der gesamte Wasserstoffvorrat verbraucht und der gesamte Kernbrennstoff ist verbraucht. Daher kühlt der Stern ab und sein Radius wächst nach ($\star$) mit abnehmender Temperatur an: Er wird zum *Roten Riesen*, in dessen Zentrum zunächst Helium und dann schwerere Elemente die Kernreaktionen aufrechterhalten.
Ist auch dieser Brennstoff verbraucht, fällt der Stern in sich zusammen und es entsteht *entartete Materie*, d.h. Materie, die rein durch ihre *Dichte* ρ charakterisiert ist (i.Ggs. zum idealen Gas, das ganz durch die Temperatur T beschrieben wird).

(PS) Entartete Materie

S. 48ff.

Aussage: *Entartete Materie* ist Materie, die rein durch ihre *Dichte* ρ charakterisiert ist. Sie entsteht z.B., wenn einem Roten Riesen der Kernbrennstoff ausgeht und er in sich zusammenfällt. Die hohe Dichte erzeugt einen hohen Elektronendruck, der auf das *Pauliprinzip* zurückzuführen ist, nach dem zwei Elektronen sich nicht im gleichen Quantenzustand befinden können. Schränkt man also Elektronen auf ein Gebiet der Größe d^3 ein (d = mittlerer Elektronenabstand), so besitzt das Elektron wegen der Unschärferelation den *Fermi-Impuls*

$$p_F\, d \approx \hbar$$

und daher eine *Fermienergie* von

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{md^2}$$

Daher spricht man von *entartetem Fermigas*, wenn

$$\epsilon_F \gg kT$$

und man ersetzt kT durch ϵ_F in der Gleichgewichtsbedingung für ein ideales Gas ($\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{kT}{\mu c^2}$). Für die Dichte $\rho = \frac{\mu}{d^3}$ erhält man also die *Zustandsgleichung für entartete Materie*

$$f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m}{\mu}\left(\frac{\rho}{\rho_C}\right)^{\frac{n}{3}} \qquad \text{mit} \qquad \rho_C := \frac{\mu}{(\hbar/mc)^3}$$

wobei $n = 2$ für $\rho < \rho_C$ und $n = 1$ für $\rho > \rho_C$ ist. Dies liegt daran, daß für $\rho > \rho_C$ die Elektronen fast Lichtgeschwindigkeit haben und sich ihre Energie daher relativistisch zu

$$\epsilon_F \approx p \cdot c$$

ergibt.
Die Zustandsgleichung ist eine Näherung und stimmt für Dichten von 10^4 kg/m^3 $< \rho >$ 10^{13} kg/m^3 mit exakten Rechnungen gut überein.

(PS) Das Ende der Sternentwicklung

S. 191 (dtv-Atlas Astronomie)

Aussage: Am Ende der Sternentwicklung bleibt ein kollabiertes Materiepaket übrig. Man unterscheidet:

1. *Weiße Zwerge:* mittlere Dichten von etwa 10^9 kg/m^3
   → v.a. aus massearmen Sternen, wie z.B. der Sonne
2. *Neutronensterne:* mittlere Dichten von etwa 10^{17} kg/m^3
   → v.a. aus massereichen Sternen durch Supernovae
3. *Schwarze Löcher:* noch höhere Dichte, lassen keine Strahlung nach außen
   → z.B. Cygnus X-1

Zum Vergleich: Planeten haben eine Dichte von etwa 10^4 kg/m^3.

(PS) Weiße Zwerge

S. 51ff.

Aussage: Weiße Zwerge können nur in einem engen Massenbereich von

$$M_P \approx 2 \cdot 10^{27}\text{kg} < M < 3 \cdot 10^{30}\text{kg} \approx M_C$$

existieren. Unterhalb von M_P folgen die Planeten, M_C nennt man *Chandrasekhar-Grenze*, welche wie folgt definiert ist:

$$M_C := \alpha_G^{\frac{3}{2}}\mu \qquad \text{mit} \qquad \alpha_G := \frac{G\mu^2}{\hbar c} \approx 10^{40}$$

Die Feinstrukturkonstante α_G der Gravitation entspricht dabei der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante α des Elektromagnetismus:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Setzt man den Wert von α_G ein, so ergibt sich

$$M_C \approx 1.5 M_\odot$$

Die Definitionsgleichung von M_C zeigt außerdem: *Das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ bestimmt nicht nur die Struktur der Atome, sondern auch die Massenskala und den inneren Aufbau der Sterne.*
Als typische Radius für einen Weißen Zwerg ergibt sich:

$$R_C \approx \frac{\lambda_e}{\sqrt{\alpha_G}} \approx 10^7 m$$

Der bekannteste Weiße Zwerg ist *Sirius B*, der 1834 von *Bessel* postuliert wurde.

(PS) Typische Dichte eines Planeten

S. 54f.

Aussage: Die typische Dichte eines Planeten ergibt sich zu

$$\rho \approx \frac{\mu}{r_B^3} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

wobei μ die Masse eines Moleküls und r_B der wie folgt definierte

$$r_B := \frac{\lambda_e}{\alpha}$$

Bohrsche Radius ist (λ_e = Compton-Wellenlänge, α = Feinstrukturkonstante).

(PS) Neutronensterne

S. 57ff.

Aussage: Neutronensterne haben eine Dichte von

$$10^{13} \text{ kg/m}^3 < \rho < 10^{20} \text{ kg/m}^3$$

Aufgrund der hohen Dichte steigt die Fermienergie der Elektronen so stark an, daß der *inverse β-Zerfall* stattfindet:

$$e + p \to n + \nu_e$$

Überschreitet die Dichte ρ jedoch 10^{16} kg/m^3, so lösen sich die Atomkerne auf und es gibt eine einheitliche Neutronenmasse, in der die Neutronen mit wachsendem Druck die Rolle der Fermi-Elektronen annehmen.
Die obere Massengrenze für Neutronensterne ist die gleiche wie für Weiße Zwerge: M_C.
Als typischer Radius für Neutronensterne ergibt sich

$$R_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha_G}} \approx 10 \text{ km}$$

wobei λ_n die Compton-Wellenlänge von Neutronen darstellt.

5 Pulsare (PU)

(PU) Pulsare

S. 64ff.

Aussage: Bei *Pulsaren* handelt es sich um Radioquellen periodisch schwankender Intensität. 1967 wurden erstmals in Cambridge/England von *Bell* und Hewish vier Pulsare entdeckt, die mit LGM 1-4 bezeichnet wurden (LGM = Little Green Men). Die Perioden betragen höchstens einige Sekunden bis hin zu einigen Millisekunden. Der Crab-Nebel, z.B., hat eine Periode von etwa 33 Millisekunden. Der Emissionmechanismus ist noch nicht eindeutig geklärt, jedoch handelt es sich wohl bei den Pulsaren um schnell rotierende Neutronensterne, da nur diese um eine entsprechend hohe Dichte verfügen, die nötig ist, um Pulse mit einer Periode von kleiner als $1s$ auszusenden.

6 Gravitationskollaps und Schwarze Löcher (SL)

(SL) Zeitdauer eines Gravitationskollapses

S. 70ff.

Aussage: Die Zeit, die ein Stern benötigt, um vollständig (d.h. bis auf einen Punkt) zu kollabieren, läßt sich wie folgt abschätzen:

$$t_K \approx \sqrt{G\rho}$$

Sie hängt also allein von der *Dichte*, nicht etwa vom Radius ab. Zu beachten ist, daß sich die Zeit t_K auf einen mitfallenden Beobachter bezieht. Für einen weit entfernten Betrachter geht der Vorgang immer langsamer vor sich, so daß der Stern in endlicher Zeit nicht den Schwarzschildradius $\mathcal{R}$ erreicht.
Beispiel: Für die Sonne mit einer Dichte von $\rho \approx 10^3$ kg/m^3 ergibt sich $t_K \approx 1$ Stunde.

(SL) Schwarze Löcher

S. 74ff.

Aussage: Bei Sternen mit einer Masse von

$$M \lesssim 10 M_\odot$$

endet ein Gravitationskollaps wahrscheinlich in einem neuen stabilen Endzustand (weißer Zwerg, Neutronenstern). Ist die Masse jedoch

$$M \gtrsim 10 M_\odot$$

kann weder der Elektronen- noch der Neutronendruck den Kollaps aufhalten und der Stern fällt bis in einen Punkt unendlicher Dichte, eine *Singularität*. Das so ent standene *Schwarze Loch* ist allein durch *Masse*, *Drehimpuls* und *elektrische Ladung* charakterisiert. Alle anderen Eigenschaften gehen während des Kollapses verloren.
Das Schwarze Loch besitzt ein effektives Potential von

$$V_E(f) = \underbrace{-\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2}}_{\text{klassischeTerme}} \underbrace{-\frac{\mathcal{R}l^2}{2r^3}}_{\text{ART}}$$

(SL) Hawking-Strahlung

S. 82ff.

Aussage: Licht kann ein Schwarzes Loch aufgrund der hohen Gravitation nicht verlassen. Dessen ungeachtet senden Schwarze Löcher Strahlung aus, wie *Stephen Hawking* im Jahre 1974 zeigte. Ursache ist die in der Quantenfeldtheorie vorhergesagte Vakuumpolarisation, nach der innerhalb der Zeitunschärfe $\Delta t \approx \frac{\hbar}{E}$ Teilchen-Antiteilchenpaare ständig erzeugt werden. Stürzt nun das eine Teilchen in das Schwarze Loch, so erscheint sein Partner als vom Schwarzen Loch ausgesandte Strahlung. Dabei gilt das *Wiensche Verschiebungsgesetz*

$$\lambda \cdot T \approx \frac{\hbar c}{k}$$

d.h. ein Schwarzes Loch sendet Photonen der Temperatur T und der Wellenlänge λ aus, welche in einfacher Weise mit der Geometrie des Schwarzen Loches verknüpft sein muß. Hier kommt nur der Schwarzschildradius in Frage, also $\lambda \sim \mathcal{R}$ und damit ergibt sich

$$T \approx \frac{\hbar c}{\mathcal{R} k} \approx \frac{\hbar c^3}{kGM} \approx 10^{24} \frac{K\,kg}{M}$$

d.h. die Temperatur der Strahlung eines Schwarzen Loches ist umgekehrt proportional zu seiner Masse.

7 Die Suche nach Schwarzen Löchern (SU)

(SU) Methoden zum Nachweis schwarzes Löcher

S. 85f.

Aussage: Man unterscheide im wesentlichen drei Methoden zum Nachweis schwarzer Löcher:

1. Doppelsternsystem, das sich in großen Entfernung umkreist
   → aus Dopplerverschiebung der Spektrallinien
2. Doppelsternsystem, das sich sehr nahe (Sternradius) umkreist
   → Überströmen von Gas ⇒ Emission von Röntenstrahlung
3. einzelne Schwarze Löcher fangen interstellares Gas ein
   → Gas heizt sich auf und sendet Licht aus

(SU) ϵ-Aurigae

S. 86ff.

Aussage: ϵ-Aurigae ist ein Doppelstern-System, bei dem der eine Partner ein normaler Stern und der andere ein Schwarzes Loch ist. Eine *Massenfunktion des Systems*

$$\mathcal{M} := \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \sin^3 i$$

erhält man mit Hilfe der Geschwindigkeit des sichtbaren Sterns und des drittes Keplerschen Gesetzes (die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen). Für ϵ-Aurigae ergibt sich

$$\mathcal{M} = 3.12 M_\odot$$

Aufgrund ihrer Beobachtungen der Verdunkelung des einen Partners durch den anderen schlossen *Wilson* und *Cameron*, daß das Schwarze Loch von einem Ring semitransparenten Materials umgeben ist.

(SU) Doppelsternsysteme als Röntgenquellen

S. 90ff.

Aussage: Ist ein Partner in einem Doppelsternsystem ein Schwarzes Loch oder ein Neutronenstern, so strömt Gas von seinem Partner herüber. Dabei wird starke Strahlung ausgesandt. Charakteristisch für Neutronensterne und Schwarze Löcher ist dabei die Emission von *Röntenstrahlen im keV-Bereich.*
Umgekehrt gilt: Doppelsternsysteme, die starke Röntenstrahlung aussenden, müssen ein Schwarzes Loch oder einen Neutronenstern enthalten.
Schwarze Löcher und Neutronensternen lassen sich dabei unterscheiden:

Neutronenstern	**Schwarzes Loch**
$M < 3M_\odot$	$M > 3M_\odot$
starkes Magnetfeld	kein Magnetfeld
regelmäßige Röntgenpulse	unregelmäßige Schwankungen in der Röntgenemission

8 Gravitationswellen (GW)

(GW) Gravitationswellen

S. 100ff.

Aussage: Als *Gravitationswellen* bezeichnet man kleine Schwingungen der Raum-Zeit die von beschleunigten Massen abgestrahlt werden. Allerdings können Gravitationswellen nennenswerter Intensität nur von Systemen ausgesandt werden, die nahe ihrem Schwarzschildradius sind (Neutronensterne oder Schwarze Löcher).
Die Abstrahlung erfolgt mit einer Energie pro Zeiteinheit (Leistung) von

$$P = \frac{G}{5c^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \dddot{Q}_{\alpha\beta}^2$$

wobei $Q_{\alpha\beta}^2$ das Quadrupolmoment der Massenverteilung darstellung und α, β Raum-Indizes darstellen.

(GW) Messung von Gravitationswellen

S. 104ff.

Aussage: Als Gravitationswellenempfänger kann *jede schwingungsfähige Anordnung von Massen* verwandt werden. *Weber* begann mit einem Aluminium-Zylinder (1,5 m x 0,5 m) als erster im Jahre 1960 seine Experimente. Der Zylinder sprach auf eine Frequenz von

$$\nu = (1660 \pm 0,03)\text{Hz}$$

an. Seine Schwingungsamplitude bei dieser Frequenz betrug 10^{-16} m! Auch wenn sich Webers Ergebnisse nicht bestätigen ließen, hat er Pionierarbeit geleistet. Bis heute gibt es keinen schlüssigen *direkten* Beweis von Gravitationswellen.
Ein *indirekter* Beweis wurde 1987 von *Taylor* erbracht: Er konnte zeigen, daß die Energieabnahme des Pulsars PSR $1913 + 16$, einem Doppelsternsystem, aufgrund von Gravitationswellenemission eine Abnahme der Bahnperiode von 10^{-4}s pro Jahr hervorruft.

9 Kosmologie (KO)

(KO) Das kosmologische Prinzip

S. 108f.

Aussage: Das *kosmologische Prinzip* besagt, daß die Erde keinen privilegierten Platz im Weltall besitzt und das Weltall von jeder Stelle den gleichen Anblick bietet.

(KO) Das Hubblesche Gesetz

S. 110f.

Aussage: Im Jahre 1929 entdeckte *Hubble*, daß die mit Hilfe der Rotverschiebung in Spektrallinien gemessene Geschwindigkeit von Galaxien proportional zu ihrem Abstand von der Erde ist:

$$v(t) = H(t)\ x(t)$$

Dieses Gesetz gilt nicht nur auf der Erde, sondern von jedem Punkt des Weltalls aus, wie man leicht nachrechnet. Von der Funktion $H(t)$ ist nur der derzeitige Wert H_0, die sogenannte *Hubble-Konstante* bekannt, wenn auch sehr ungenau. Ihr Inverses gibt eine obere Grenze für das Alter des Universums an:

$$H_0^{-1} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre} = 6 \cdot 10^{17} s$$

(KO) Welthorizont

S. 113f.

Aussage: Da die Geschwindigkeit von Galaxien relativ zu uns proportional zu ihrer Entfernung von uns ist, müßte diese Geschwindigkeit bei ausreichender Entfernung die Lichtgeschwindigkeit überschreiten. Da dies nach der speziellen Relativitätstheorie nicht möglich sein kann, muß es einen Horizont geben, jenseits dessen wir nicht schauen können, den sogenannten *Welthorizont*

$$A = \frac{c}{H} \approx 2 \cdot 10^{26} m \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Lichtjahre}$$

(KO) Dynamik des Universums

S. 114ff.

Aussage: Die Grundgleichung der Newtonschen Kosmologie ist die *Friedmann-Gleichung*

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - \frac{C}{R} + k = 0$$

Sie gilt auch in der allgemeinen Relativitätstheorie. Allerdings hat hier k nicht die Bedeutung einer Integrationskonstante, sondern die der *negativen Energiedichte*. Die Lösungen der Friedmann-Gleichung verhalten sich unterschiedlich, je nachdem, ob k größer, kleiner oder gleich 0 ist:

1. $k > 0$: negative Energie - geschlossenes Universum
   → nach Urknall und Expansion wieder Kontraktion und „Big Crunch“
2. $k \leq 0$: positive/Null- Energie - offenes Universum
   → Expansion für alle Zeiten

Ein geschlossenes Universum besitzt eine Mindesdichte, da die Kontraktion ja nur aufgrund von Gravitationskräften erfolgen kann. Sie ergibt sich zu

$$\rho_{min} > \frac{3}{8\pi G} H_0^2$$

Da die bisher gemessene Dichte kleiner ist als ρ_{min}, ist die Suche nach dunkler Materie eine wichtige Aufgabe.

(KO) Krümmung des Weltalls

S. 116ff.

Aussage: Die Konstante k der Friedmann-Gleichung stellt nicht nur die negative Energiedichte dar, sondern bezeichnet nach den Einsteinsteinschen Feldgleichungen auch die *Krümmung des Weltraums*. Das bedeutet aber, daß das Weltall (wenn überhaupt) *konstant gekrümmt* ist. Da es nach dem kosmologischen Prinzip von überall aus gleich aussieht, bleiben drei Möglichkeiten (a = mittlerer Abstand zweier Galaxien):

1. $k = 0$: keine Krümmung - Schnittflächen sind Flächen
   → im Abstand a von der Erde befinden sich etwa $2\pi \approx 6$ Galaxien
2. $k = 1$: positive Krümmung - Schnittflächen sind Kugeln
   → im Abstand a von der Erde befinden sich weniger als 6 Galaxien
3. $k = 1$: negative Krümmung - Schnittflächen sind Sättel
   → im Abstand a von der Erde befinden sich mehr als 6 Galaxien

10 Kosmogonie und das frühe Universum (KG)

(KG) Die kosmische Hintergrundstrahlung

S. 126ff.

Aussage: In den 40er Jahren postulierten *Gamov* u.a., daß die schwereren Elemente in intensiven Kernreaktion bei extrem hohen Temperaturen kurz nach dem Urknall entstanden seien. Ein Nachhall sollte sich in einer isotropen Strahlung im Universum finden lassen. Obwohl die Theorie der Entstehung schwerer Elemente nicht haltbar ist, entdeckten *Penzias* und *Wilson* im Jahre 1965 zufälltig eine *2.7 K*-Hintergrundstrahlung. Da für die Strahlungsdichte ρ folgende Relationen gelten

$$\rho \propto T^4 \qquad \text{und} \qquad \rho \propto R^{-4}$$

lassen sich der Radius R des Universums mit seiner Temperatur T wie folgt verknüpfen:

$$T = 2.7K \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)$$

dabei stellt R_0 den derzeitigen Radius des Universums dar.

(KG) Zeitalter des Universums

S. 131

Aussage: Mit Hilfe der aus der kosmischen 2.7 K-Hintergrundstrahlung sich ergebenden Formel

$$T = 2.7K \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right),$$

wobei Radius bzw. Temperatur des Universums mit R bzw. T bezeichnet werden und R_0 der derzeitige Wert von R ist, lassen sich folgende *Zeitalter des Universums* unterscheiden:

Name	**Zeit**	**Radius**	**Dichte**	**Temperatur**
Zeitalter der Hadronen	10^{-4}s	10^{14}m	10^{18}kg/m^3	10^{12}K
Zeitalter der Kernreaktionen	1000s	10^{17}m	1 kg/m^3	10^8K
Zeitalter der Strahlung	10^6 Jahre	10^{23}m	10^{-18}kg/m^3	10^4K
Zeitalter der Sterne	10^{10} Jahre	10^{26}m	10^{-27}kg/m^3	3 K