Lernkartei Allgemeine Relativitätstheorie

(`http://www.uni-karlsruhe.de/~um3f/TeX/physik.html`)

von Christof Degenhart

nach den „*Lecture Notes on General Relativity*“
von Sean M. Carroll
(`http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/`)

Inhaltsverzeichnis

1 Spezielle Relativität und flache Raumzeit (SR)

(SR) Raumzeitintervall

S. 3

Aussage:

$$s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

oder kurz:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Kann positiv, negativ und Null auch für unterschiedliche Ereignisse sein.

(SR) Minkowski Metrik

S. 4

Aussage:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(SR) Lorentz-Transformation mit Motivation

S. 4f.

Aussage: Für die lineare Transformation

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} x^\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad x' = \Lambda x$$

sucht man nach Transformations-Matrizen, die Raumzeitintervalle invariant lassen:

$$\begin{aligned} s^2 &= (\Delta x)^T \eta (\Delta x) = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') = (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x) \\ &\Rightarrow \ \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \qquad (*) \end{aligned}$$

Lorentz-Transformationen sind Matrizen, für die $(*)$ gültig ist.

(SR) Kategorien von Lorentz-Transformationen

S. 5f.

Aussage:

1. Rotationen: z.B. in der x-y-Ebene:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   mit periodischem $0 \le \theta < 2\pi$

2. Boosts: (Rotationen zwischen Raum und Zeit)

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   mit dem Boost-Parameter $-\infty < \phi < \infty$

   boosten: wechseln in ein Inertialsystem, das sich relativ zum bisherigen mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt

(SR) Die Poincaré-Gruppe

S. 6

Aussage: Eine zehn-parametrige nicht-abelsche Gruppe bestehend aus

1. Translationen: $x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu \in \mathbb{R}^4$ (4 Parameter)
2. Lorentz-Transformationen:
   (a) Rotationen (3 Parameter)
   (b) Boosts (3 Parameter)

(SR) Tangential-Raum

S. 7

Aussage: In den Räumen der Relativitätslehre gibt es keine freien Vektoren, die sich von Punkt zu Punkt erstrecken, sondern *jeder Vektor ist an einem best. Raum-Zeit-Punkt lokalisiert*.
Als *Tangentialraum* T_p im Punkt p bezeichnet man die Menge aller möglichen Vektoren in diesem Punkt.
Beispiel: In einem zweidimensionalen gekrümmten Raum ist T_p die Tangentialebene im Punkt p.

(SR) *Definition:* Vektorraum

S. 8

Aussage: Ein *Vektorraum* ist eine Sammlung von Objekten („Vektoren“), welche auf lineare Weise multipliziert und addiert werden können:

$$(a+b)(V+W) = aV + bV + aW + bW, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

In jedem Vektorraum gibt es einen Null-Vektor, der als Identitätselement unter der Addition fungiert.

(SR) *Definition:* Vektorfeld

S. 8

Aussage: Ein *Vektorfeld* ist eine Menge von Vektoren mit genau einem Vektor pro Raumzeit-Punkt.

(SR) *Definition:* Tangentialbündel

S. 8

Aussage: Als *Tangentialbündel* $T(M)$ bezeichnet man die Menge aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit M.

(SR) *Definition:* Basis eines Vektorraums

S. 8

Aussage: Eine *Basis* ist eine beliebige Menge von Vektoren, welche

1. den Vektorraum aufspannt
   → jeder Vektor eine Linearkombination der Basisvektoren ist
2. linear unabhängig sind
   → kein Basisvektor ist eine Linearkombination der anderen Basisvektoren

(SR) Lorentz-Transformation der Basisvektoren eines Lorentz-invarianten Vektors

S. 9f.

Aussage: Sei der Vektor V Lorentz-invariant und $V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$ mit den Basisvektoren $\hat{e}_{(\mu)}$. Da die Koordinaten sich wie folgt transformieren:

$$V^\mu \to V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} V^\nu$$

folgt aus der Lorentz-Invarianz:

$$V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)} = V^{\nu'} \hat{e}_{(\nu')} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} V^\mu \hat{e}_{(\nu')}$$

d.h.

$$\hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \hat{e}_{(\nu')}.$$

Da das entsprechende für die Rücktransformation gelten muß, ergibt sich:

$$\Lambda_{\nu'}{}^{\mu} \Lambda^{\sigma'}{}_{\mu} = \delta^{\sigma'}_{\nu'}$$

(SR) ***Definition:*** **Dualer Vektorraum**

S. 10f.

Aussage: Als *Dualraum* bezeichnet man den Raum aller linearen Abbildungen aus dem ursprünglichen Vektorraum nach $\mathbb{R}$. Der Dualraum zum Tangentialraum T_p heißt *Kotangentialraum* $T_p^\star$. Sei $\omega \in T_p^\star$ ein dualer Vektor, dann gilt:

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $V, W \in T_p$. Eine Basis des Dualraum definiert sich wie folgt:

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) := \delta^\nu_\mu$$

(SR) ***Definition:*** **Kovariante und Kontravariante Vektoren**

S. 11

Aussage: Die Elemente des Tangentialvektorraums T_p heißen *kontravariante Vektoren*, die des Kotangentialraums $T_p^\star$ nennt man *kovariante Vektoren*.

(SR) Wie wirkt ein duales Vektorfeld auf ein Vektorfeld?

S. 11

Aussage: Wendet man ein duales Vektorfeld auf ein Vektorfeld an, erhält man nicht eine einfache Zahl, sondern einen *Skalar* (oder anders ausgedrückt: eine *Funktion*) der Raumzeit. Ein Skalar besitzt keine Indizes und ist Lorentz-invariant.

(SR) ***Definition:*** **Gradient einer skalaren Funktion**

S. 12

Aussage: Als *Gradienten* „d“ einer skalaren Funktion bezeichnet man die Menge der partiellen Ableitungen nach den Raumzeitkoordinaten:

$$\mathrm{d}\phi := \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\hat{\theta}^{(\mu)}$$

D.h. der Gradient ist ein dualer Vektor.

(SR) ***Definition:*** **Tensor**

S. 13

Aussage: Ein (k,l)-*Tensor* ist eine multilineare Abbildung von einer Sammlung von k Vektoren und l dualen Vektoren nach $\mathbb{R}$:

$$T: \quad \underbrace{T_p^\star \times \ldots \times T_p^\star}_{(k \text{ mal})} \quad \times \quad \underbrace{T_p \times \ldots \times T_p}_{(l \text{ mal})} \to \mathbb{R}$$

Ein Skalar ist ein $(0,0)$-Tensor, ein Vektor ein $(1,0$-Tensor und ein dualer Vektor ein $(0,1)$-Tensor.

(SR) ***Definition:*** **Tensor-Produkt**

S. 13f.

Aussage: Der Raum aller Tensoren eines festen Typs, (k,l), bildet einen Vektorraum, auf dem das *Tensorprodukt* $\otimes$ definiert ist:

$$\begin{aligned} T \quad \otimes \quad S \quad & (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, \ldots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}, \ldots, V^{(l+n)}) \\ := \quad & T(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) \quad S(\omega^{(k+1)}, \ldots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \ldots, V^{(l+n)}) \end{aligned}$$

wobei T einen (k,l)-Tensor, S einen (m,n)-Tensor und die $\omega^{(i)}$ duale Vektoren und die $V^{(i)}$ Vektoren darstellen.
NB: Im allgemeinen ist $T \otimes S \neq S \otimes T$.

(SR) Tensor in Komponentenschreibweise

S. 14

Aussage:

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}\, \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \ldots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)}$$

Die Komponenten können auch durch die Wirkung des Tensors auf die Basisvektoren definiert werden:

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T\left(\hat{\theta}^{(\mu_1)}, \ldots, \hat{\theta}^{(\mu_k)}, \hat{e}_{(\nu_1)}, \ldots, \hat{e}_{(\nu_l)}\right)$$

(SR) Wirkung eines Tensors auf Vektoren und duale Vektoren

S. 14

Aussage:

$$T\ (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) \ = \ T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}\ \omega^{(1)}_{\mu_1} \ldots \omega^{(k)}_{\mu_k}\ V^{(1)\nu_1} \ldots V^{(l)\nu_l}$$

(SR) Lorentz-Transformation eines Tensors

S. 14

Aussage:

$$T^{\mu'_1 \ldots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \ldots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \ldots \Lambda^{\mu'_k}{}_{\mu_k} \Lambda_{\nu'_1}{}^{\nu_1} \ldots \Lambda_{\nu'_l}{}^{\nu_l}\ T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}$$

(SR) ***Definition:*** **Inneres Produkt**

S. 15

Aussage: Das *innere Produkt* zweier Vektoren V, W ist definiert als die Wirkung der Metrik $(\eta_{\mu\nu})$ auf diese Vektoren:

$$V \cdot W := \eta(V, W) = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$$

(SR) Klassifikation von Vektoren im Minkowski-Raum

S. 15f.

Aussage: Die Klassifikation erfolgt mit Hilfe des inneren Produktes $V \cdot W := \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$:

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \begin{cases} < 0: & V^\mu \text{ ist } \textit{zeitartig} \\ = 0: & V^\mu \text{ ist } \textit{lichtartig} \\ > 0: & V^\mu \text{ ist } \textit{raumartig} \end{cases}$$

(SR) *Definition:* Inverse Metrik

S. 16

Aussage: Die inverse Metrik $\eta^{\mu\nu}$ ist ein $(2,0)$-Tensor und definiert sich mit Hilfe von:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} \equiv \eta_{\rho\nu}\eta^{\nu\mu} := \delta^\rho_\mu$$

(SR) Tensoren, deren Komponenten normalerweise immer gleich sind

S. 16

Aussage: Die Komponenten

1. des Kronecker-Deltas δ^μ_ν
2. des Levi-Civita-Tensors $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$
3. der Metrik $\eta_{\mu\nu}$
4. der inversen Metrik $\eta^{\mu\nu}$

bleiben unverändert in *jedem Kartesischen Koordinatensystem in flacher Raumzeit*. Das Kronecker-Delta hat in *jedem Koordinatensystem in jeder Raumzeit* die gleichen Komponenten.

(SR) *Definition:* Elektromagnetischer Feldstärke-Tensor

S. 16f.

Aussage: Der *Elektromagnetischer Feldstärke-Tensor* ist ein $(0,2)$-Tensor, der definiert ist durch

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

(SR) *Definition:* Kontraktion eines Tensors

S. 17

Aussage: Eine *Kontraktion* macht aus einem (k,l)-Tensor einen $(k-1,l-1)$-Tensor, indem über einen oberen und einen unteren Index summiert wird:

$$S^{\mu\rho}{}_\sigma = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}$$

Man erhält unterschiedliche Tensoren durch bei unterschiedlicher Reihenfolge der Indizes:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}$$

(SR) *Definition:* Herauf- bzw. Herunterziehen von Tensor-Indizes

S. 17

Aussage: Das *Herauf- bzw. Herunterziehen von Tensor-Indizes* geht mit Hilfe der Metrik bzw. der inversen Metrik vonstatten:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu}{}_\delta &= \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \\ T_\mu{}^\beta{}_{\gamma\delta} &= \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

Beispiele: $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$ und $\omega^\mu = \eta^{\mu\nu}\omega_\nu$

(SR) *Definition:* (Anti-)Symmetrischer Tensor

S. 18

Aussage: Ein Tensor heißt *symmetrisch* in zwei Indizes, wenn bei Vertauschen dieser Indizes der Tensor gleich bleibt, z.B. ist

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho}$$

symmetrisch in den ersten beiden Indizes.
Ein Tensor heißt *antisymmetrisch* in zwei Indizes, wenn bei Vertauschen dieser Indizes der neue Tensor gleich minus 1 mal dem alten Tensor ist, z.B. ist

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\rho\nu\mu}$$

antisymmetrisch im ersten und dritten Index.

(SR) (Anti-)Symmetrisierung eines Tensors

S. 19

Aussage: Um einen Tensor zu symmetrisieren, nimmt man die Summe über die relevanten Indizes und teilt durch die Anzahl der Terme:

$$T_{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{Summe über die Permutationen von } \mu_1\ldots\mu_n)$$

Bei der Antisymmetrisierung wird die alternierende Summe gebildet, d.h. bei einer ungeraden Anzahl von Indexvertauschungen erhält der Term ein Minuszeichen:

$$T_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_n]\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{altern. Summe über die Permutationen von } \mu_1\ldots\mu_n)$$

Für die Symmetrisierung von Indizes, die nicht nebeneinander stehen verwendet man folgende Notation:

$$T_{(\mu|\nu|\rho)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu})$$

(SR) Geltungsbereich partieller Ableitungen

S. 19f.

Aussage: Die partielle Ableitungen eines (k,l)-Tensors ergeben *nur in Kartesischen Koordinaten in flacher Raumzeit* einen $(k,l+1)$-Tensor

$$\partial_\alpha R^\mu{}_\nu = T_\alpha{}^\mu{}_\nu$$

d.h. sind nur dort Lorentz-invariant. In allgemeinen Raumzeiten müssen die partiellen durch die kovarianten Ableitungen ersetzt werden.

(SR) Maxwell-Gleichungen in Vektornotation

S. 20

Aussage:

$$\begin{aligned}\vec\nabla\times\vec B - \partial_t\vec E &= 4\pi\vec J\\ \vec\nabla\cdot\vec E &= 4\pi\rho\\ \vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B &= 0\\ \vec\nabla\cdot\vec B &= 0\end{aligned}$$

(SR) Maxwell-Gleichungen in Tensorschreibweise

S. 20f.

Aussage:

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\partial_j B_k - \partial_0 E^i &= 4\pi J^i\\ \partial_i E^i &= 4\pi J^0\\ \epsilon^{ijk}\partial_j E_k - \partial_0 B^i &= 0\\ \partial_i B^i &= 0\end{aligned}$$

oder kurz:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\nu\mu} &= 4\pi J^\nu\\ \partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} &= 0\end{aligned}$$

Beide Seiten verhalten sich wie Tensoren, gelten also auch in jedem Lorentz-transformierten Bezugssystem. Diese beiden Gleichungen heißen daher *kovariante Form* der Maxwell-Gleichungen.

(SR) *Definition:* Differential-Formen

S. 21

Aussage: Eine *Differential-(p)-Form* ist ein vollständig antisymmetrischer $(0,p)$-Tensor.
Beispiele:

- Skalare: 0-Formen
- duale Vektoren: 1-Formen
- elektromagnetischer Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$: 2-Form
- Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$: 4-Form

Der Raum aller p-Formen über der Manigfaltigkeit M heißt $\Lambda^p(M)$.

(SR) *Definition:* Das Dach-Produkt

S. 21f.

Aussage: Sei A eine p-Form und B eine q-Form, dann nennt man die $(p+q)$-Form

$$(A\wedge B)_{\mu_1\ldots\mu_{p+q}} := \frac{(p+q)!}{p!\,q!}A_{[\mu_1\ldots\mu_p}B_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{p+q}]}$$

Dach-Produkt $A\wedge B$ von A und B.
Beispiel: $(A\wedge B)_{\mu\nu} = 2A_{[\mu}B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$
NB: $A\wedge B = (-1)^{pq}\; B\wedge A$

(SR) ***Definition:*** **Äußere Ableitung**

S. 22

Aussage: Die *äußere Ableitung* „d“ ermöglicht es, ein p-Form-Feld abzuleiten. Man erhält dabei eine $(p+1)$-Form:

$$(\mathrm{d}A)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} := (p+1)\ \partial_{[\mu_1}A_{\mu_2\ldots\mu_{p+1}]}$$

Beispiel: der Gradient als Ableitung einer 1-Form:

$$(\mathrm{d}\phi)_\mu = \partial_\mu \phi$$

NB:

- die äußere Ableitung ist *immer ein Tensor*, auch in gekrümmten Raumzeiten (i.Ggs. zur partiellen Ableitung)!
- für jede Form A gilt:
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}A) = 0 \qquad \text{kurz:} \quad \mathrm{d}^2 = 0$$

(SR) ***Definition:*** **Geschlossene p-Form**

S. 22

Aussage: Eine p-Form A heißt *geschlossen*, wenn gilt:

$$\mathrm{d}A = 0$$

(SR) ***Definition:*** **Exakte p-Form**

S. 22

Aussage: Eine p-Form A heißt *exakt*, wenn eine $(p-1)$-Form B gibt, so daß

$$A = \mathrm{d}B$$

NB: Jede exakte Form ist auch geschlossen.

(SR) ***Definition:*** **de-Rham-Kohomologie-Vektorraum**

S. 22f.

Aussage: Sei $Z^p(M)$ der Vektorraum der geschlossenen p-Formen und $B^p(M)$ der Vektorraum der exakten p-Formen, dann definiert sich der p-te *de-Rham-Kohomologie-Vektorraum* als

$$H^p(M) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

(SR) ***Definition:*** **Hodge-Dualität**

S. 23

Aussage: Der *Hodge-Stern-Operator* auf einer n-dimensionalen Manigfaltigkeit ist eine Abbildung von p-Formen nach $(n-p)$-Formen:

$$(\star A)_{\mu_1\ldots\mu_{n-p}} := \frac{1}{p!}\ \epsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_{n-p}} A_{\nu_1\ldots\nu_p}$$

NB:

- die Hodge-duale Form hängt von der Metrik der Manigfaltigkeit ab
- bei doppelter Anwendung ergibt sich die Orginalform mit plus oder minus eins multipliziert:
$$\star\star A = (-1)^{s+p(n-p)}\ A$$
wobei s die Anzahl der negativen Eigenwerte der Metrik ist.

(SR) Wichtige Beziehung zwischen Dachprodukt und Hodge-Dualität

S. 23

Aussage:

$$\star(A^{(n-p)} \wedge B^{(p)}) \in \mathbb{R}$$

Im 3-dimensionalen euklidischen Raum ergibt sich das Kreuz-Produkt:

$$\star(U \wedge V)_i = \epsilon_i{}^{jk} U_j V_k$$

(SR) Maxwell-Gleichungen in Formenschreibweise

S. 24f.

Aussage:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= 0 \\ \mathrm{d}(\star F) &= 4\pi\ (\star J) \end{aligned}$$

Für $J_\mu = 0$ sind diese Gleichungen invariant unter Dualitäts-Transformationen:

$$\begin{aligned} F &\to \star F \\ \star F &\to -F \end{aligned}$$

(SR) ***Definition:*** **Linienelement**

S. 25f.

Aussage: Die Größe

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu$$

heißt *Linienelement*.

(SR) ***Definition:*** **Weglänge**

S. 26

Aussage: Sei $x^\mu(\lambda)$ ein Weg, dann bezeichnet man

$$\Delta s = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

als *Weglänge*. Sie unterscheidet sich von der Eigenzeit nur durch das Vorzeichen unter der Wurzel.

(SR) ***Definition:*** **Eigenzeit**

S. 26

Aussage: Sei $x^\mu(\lambda)$ ein Weg, dann bezeichnet man

$$\Delta \tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

als *Eigenzeit*. Sie unterscheidet sich von der Weglänge nur durch das Vorzeichen unter der Wurzel und entspricht der Zeit, die eine Uhr mißt, die entlang des Weges mitgenommen wird.

(SR) ***Definition:*** **Vierergeschwindigkeit eines massiven Teilchens**

S. 27

Aussage:

$$U^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Wegen $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ist sie automatisch normalisiert:

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$$

(SR) ***Definition:*** **Energie-Impuls-Vierervektor**

S. 27

Aussage:

$$p^\mu := m U^\mu \equiv m\gamma(c, \vec{v})$$

mit $\gamma := 1/\sqrt{1-v^2}$.

(SR) ***Definition:*** **Perfektes Fluid**

S. 28

Aussage: Alle in der allgemeinen Relativitätstheorie wichtigen Arten von Materie sind *perfekte Fluide*:

- **Fluid:** Materie-Kontinuum, das durch makroskopische Quantitäten wie Temperatur, Druck, Entropie usw. beschrieben wird
- **perfekt:**

  Schulz: keine Wärmeleitfähigkeit und keine Viskosität

  Weinberg: im Ruhesystem isotropisch

  Caroll: vollständig durch Druck und Dichte beschrieben

(SR) ***Definition:*** **Staub**

S. 28

Aussage: Als *Staub* bezeichnet man

entweder: eine Ansammlung von Teilchen, die zueinander in Ruhe sind

oder: ein perfektes Fluid mit Druck Null

(SR) **Energie-Impuls-Tensor**

S. 28ff.

Aussage: Der *Energie-Impuls-Tensor* ist ein symmetrischer $(2,0)$-Tensor, der alle Information über energieartige Eigenschaften eines Systems enthält.
Der Energie-Impuls-Tensor eines perfekten Fluids ergibt sich zu

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}$$

wobei ρ die Energie-Dichte bezeichnet.
Energie- und Impulserhaltung folgt aus dem Verschwinden der Divergenz:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

2 Manigfaltigkeiten (MF)

(MF) Idee einer Manigfaltigkeit

S. 31f.

Aussage: Ein Raum, der gekrümmt sein und eine komplizierte Topologie haben kann, der aber lokal wie ein $\mathbb{R}^n$ aussieht.
Beispiele:

- der $\mathbb{R}^n$ selbst
- die n-Sphäre S^n
- der n-Torus T^n
- die Riemannfläche vom Genus g (2-Torus mit g Löchern anstelle von einem)

(MF) *Definition:* Abbildung

S. 33

Aussage: Seien M, N Mengen, dann definiert

$$\phi : M \to N$$

eine *Abbildung*, wenn ϕ jedem Element aus M genau ein Element aus N zuordnet.

(MF) *Definition:* Verknüpfung zweier Abbildungen

S. 33

Aussage: Seien $\phi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ zwei Abbildungen, dann ist die *Verknüpfung* $\psi \circ \phi : A \to C$ definiert durch die Operation

$$(\psi \circ \phi)(a) = \psi(\phi(a))$$

(MF) *Definition:* Injektive Abbildung

S. 33

Aussage: Die Abbildung $\phi : M \to N$ heißt *injektiv*, wenn jedem Element aus N höchstens ein Element aus M zugeordnet ist.

(MF) *Definition:* Bijektive Abbildung

S. 33

Aussage: Die Abbildung $\phi : M \to N$ heißt *bijektiv*, wenn jedem Element aus N genau ein Element aus M zugeordnet ist, d.h. die Abbildung ist sowohl injektiv wie surjektiv.

(MF) *Definition:* Inverse Abbildung

S. 34

Aussage: Sei $\phi : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann ist die *inverse Abbildung* $\phi^{-1} : N \to M$ definiert durch

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(a) = (a)$$

(MF) Idee einer kontinuierlichen Abbildung

S. 34f.

Aussage: Die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *kontinuierlich* oder C^p, wenn sie durch eine Sammlung von Funktionen ϕ^i

$$\begin{aligned} y^1 &= \phi^1(x^1, x^2, \ldots, x^m) \\ y^2 &= \phi^2(x^1, x^2, \ldots, x^m) \\ &\ldots \\ y^n &= \phi^n(x^1, x^2, \ldots, x^m) \end{aligned}$$

definiert ist, die alle kontinuierlich und p-mal differenzierbar sind.

(MF) *Definition:* Glatte Abbildung

S. 35

Aussage: Eine Abbildung heißt *glatt*, wenn sie C^∞ ist, d.h. kontinuierlich und beliebig oft differenzierbar.

(MF) *Definition:* Diffeomorphismus

S. 35

Aussage: Eine Abbildung $\phi : M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn sie und ihr Inverses $\phi^1 : N \to M$ beide C^∞ sind.

(MF) *Definition:* Kettenregel für Abbildungen

S. 35f.

Aussage: Seien $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen und $x^a \in \mathbb{R}^m, y^b \in \mathbb{R}^n, z^c \in Rz^l$, dann gilt für die Ableitung der Verknüpfung beider Abbildungen die *Kettenregel*

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a}\frac{\partial g^c}{\partial y^b}$$

(MF) *Definition:* Jakobi-Matrix

S. 36

Aussage: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x^a \in \mathbb{R}^n,\ y^b \in \mathbb{R}^n$, dann heißt die Matrix

$$\frac{\partial y^b}{\partial x^a}$$

Jakobi-Matrix der Abbildung f und f ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante der Jakobi-Matrix Null ist.

(MF) ***Definition:*** **Offener Ball**

S. 36

Aussage: Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|x - y| < r$$

für festes $y \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ heißt *offener Ball*, wobei die Norm definiert ist als $|x-y| := \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}$.

(MF) ***Definition:*** **Offene Menge**

S. 36

Aussage: Eine *offene Menge* in $\mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung einer beliebigen Zahl (sogar unendlich vieler) offener Bälle.
Mit anderen Worten: $V \in \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn für jedes $y \in V$ ein offener Ball um y herum existiert, der ganz in V liegt.

(MF) ***Definition:*** **Koordinatensystem**

S. 37

Aussage: Ein *Koordinatensystem* ist eine Untermenge U von einer Menge M zusammen mit einer injektiven Abbildung $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, für die gilt, daß das Bild $\phi(U)$ offen ist in $\mathbb{R}^n$.

(MF) ***Definition:*** **Atlas**

S. 37

Aussage: Ein C^∞-Atlas besteht aus einer indizierten Sammlung von Koordinatensystemen $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, für die gilt:

1. die Vereinigung der U_α ist gleich M, d.h. die U_α überdecken M
2. die Koordinatensysteme sind glatt zusammengenäht, d.h. wenn zwei Koordinatensysteme überlappen ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$), dann bildet ($\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$) die Punkte in $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ injektiv auf $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ ab und alle diese Abbildungen sind C^∞.

(MF) ***Definition:*** **Manigfaltigkeit**

S. 38

Aussage: Eine C^∞ n-dimensionale *Manigfaltigkeit* ist eine Menge M zusammen mit einem maximalen Atlas (d.h. einem Atlas, der jedes mögliche Koordinatensystem enthält. Dies gewährleistet, daß nicht zwei äquivalente Räume mit unterschiedlichen Atlanten als verschiedene Manigfaltigkeiten zählen).
→ Die Koordinatensysteme ermöglichen die Eigenschaft von Manigfaltigkeiten, lokal wie ein $\mathbb{R}^n$ auszusehen, und damit die Differenzier- und Integrierbarkeit von Abbildungen auf der Manigfaltigkeit.

(MF) ***Definition:*** **Ableitung einer Abbildung auf einer Manigfaltigkeit**

S. 40f.

Aussage: Seien M und N Manigfaltigkeiten mit den Koordinatensystemen $\phi : M \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : N \to \mathbb{R}^n$, f eine Abbildung von M nach N und $x^\mu \in \mathbb{R}^m$, dann ist die Ableitung von f definiert als:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^\mu)$$

(MF) ***Definition:*** **Tangentialraum an eine Manigfaltigkeit**

S. 41f.

Aussage: Sei M eine Manigfaltigkeit, p ein Punkt auf M und $\mathcal{F}$ der Raum der glatten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ auf M. Dann definiert jede Kurve durch p einen Operator auf $\mathcal{F}$, nämlich die *Richtungsableitung*

$$f \to \frac{df}{d\lambda}.$$

Der *Tangentialraum* T_p ist dann der Raum der Richtungsableitungen entlang der Kurven durch p.

(MF) **Koordinatenbasis des Tangentialraums an eine Manigfaltigkeit**

S. 43

Aussage: Sei M eine n-Manigfaltigkeit mit dem Koordinatensystem $\phi : M \to \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve auf M und $f : M \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann sieht man aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f &= \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma) = \frac{d}{d\lambda}[(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)] \\ &= \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f, \end{aligned}$$

daß die partiellen Ableitungen $\{\partial_\mu\}$ eine gute Basis für den Tangentialraum darstellen:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu$$

(MF) Koordinatentransformation im Tangentialraum

S. 43f.

Aussage: Aufgrund der Kettenregel ergibt sich für die Basis des Tangentialraums, die partiellen Ableitungen ∂_μ, folgende Gleichung für Koordinatentransformationen:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu$$

Fordert man, daß ein Vektor bei Wechsel der Basis gleichbleiben soll ergeben sich aus

$$V^\mu \partial_\mu = V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu$$

die Transformationsregeln für Vektoren:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu$$

Lorentz-Transformationen sind spezielle Transformationen mit

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu x^\mu$$

(MF) *Definition:* Gradient einer Funktion auf einer Manigfaltigkeit

S. 44

Aussage: Der Gradient $\mathrm{d}f$ einer Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ auf einer Manigfaltigkeit M ist eine 1-Form und wirkt auf einen Vektor $\frac{d}{d\lambda}$ als Richtungsableitung

$$\mathrm{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda}$$

(MF) Basis und Koordinatentransformation im Kotangentialraum

S. 45

Aussage: Ähnlich der Forderung im flachen Raum, $\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)})$, konstruiert man eine Basis $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ mit Hilfe von

$$\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

so daß sich eine 1-Form darstellen läßt als $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$. Die Koordinaten-Transformationen lauten für 1-Formen:

$$\mathrm{d}x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu$$

für deren Komponenten:

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu$$

Daraus folgt für einen (k,l)-Tensor

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_k}\, \partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_l}$$

das folgende Transformationsgesetz:

$$T^{\mu'_1 \ldots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \ldots \nu'_k} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}\, T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_k}$$

(MF) Kanonische Form des Metrischen Tensors

S. 49

Aussage: Jede Metrik $g_{\mu\nu}$ kann in folgende *kanonischer Form* gebracht werden (ohne Beweis):

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, \ldots, -1, +1, +1, \ldots, +1, 0, 0, \ldots, 0)$$

Sei n die Dimension der Manigfaltigkeit, s die Anzahl der $+1$ und t die Anzahl der -1, dann heißt

- $s - t$ *Signatur* der Metrik
- $s + t$ *Rang* der Metrik

Die Metrik heißt

- *nichtdegeneriert*, wenn der Rang gleich n ist
- *kontinuierlich*, wenn Rang und Signatur an jedem Punkt der Manigfaltigkeit gleich sind
- *euklidisch/riemansch*, wenn alle Einträge positiv sind $(t = 0)$
- *lorentzisch/pseudo-riemansch*, wenn ein Eintrag -1 ist $(t = 1)$
- *indefinit* sonst

(MF) *Definition:* Riemannsche Normal-Koordinaten

S. 50

Aussage: Ein *Riemansches Normalkoordinaten-System*, ist ein Koordinatensystem, in dem $g_{\mu\nu}$ seine kanonische Form annimmt und außerdem

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \qquad \forall \sigma$$

(MF) *Definition:* Tensordichte

S. 52

Aussage: Eine *Tensordichte* ist ein Objekt, das sich ähnlich wie ein Tensor transformiert, aber mit einem zusätzlichen Faktor, einer Potenz der Jakobi-Determinante,

$$\left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right|^w,$$

wobei w als das *Gewicht* der Tensordichte bezeichnet wird.
Ein Beispiel für eine Tensordichte ist die Determinante der Metrik, $g = |g_{\mu\nu}|$, die sich wie folgt transformiert:

$$g(x^{\mu'}) = \left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right|^{-2} g(x^\mu),$$

so daß man eine Tensordichte in einen Tensor umwandeln kann, indem man sie multipliziert mit

$$|g|^{w/2}$$

(MF) Levi-Civita-Symbol und Transformationseigenschaften

S. 51f.

Aussage: Das *Levi-Civita-Symbol* hat folgende Komponenten:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n} := \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mu_1\mu_2\ldots\mu_n \text{ eine gerade Permutation von } 012\ldots(n-1) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } \mu_1\mu_2\ldots\mu_n \text{ eine ungerade Permutation von } 012\ldots(n-1) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in *jedem* Koordinatensystem und ist daher kein Tensor. Stattdessen ist es eine Tensordichte mit Gewicht 1.
Der *Levi-Civita-Tensor* definiert sich dann wie folgt:

$$\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} := \sqrt{|g|}\ \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}$$

(MF) *Definition:* Orientierbare Manigfaltigkeiten

S. 52

Aussage: Eine Manigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn der Levi-Civita-Tensor global definiert werden kann.

(MF) Volumenelement auf einer Manigfaltigkeit

S. 52f.

Aussage: Das Volumenelement im $\mathbb{R}^n$ ist keine n-Form, sondern eine Tensordichte mit Gewicht 1:

$$d^n x' = \left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right| d^n x$$

Durch Multiplikation mit $\sqrt{|g|}$ läßt sich daher ein invariantes Volumenelement (eine n-Form) konstruieren:

$$\sqrt{|g|}\ d^n x \leftrightarrow \sqrt{|g|}\ \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} = \sqrt{|g'|}\ \mathrm{d}x^{0'} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{(n-1)'}$$

(MF) Stoke-Theorem

S. 53f.

Aussage: Sei M eine n-Manigfaltigkeit mit Rand ∂M und ω eine $(n-1)$-Form auf M, dann gilt:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

3 Krümmung des Raums (KR)

(KR) *Definition:* Kovariante Ableitung

S. 55ff.

Aussage: Die *kovariante Ableitung* ∇ ist eine Abbildung von einem (k,l)-Tensor auf einen $(k,l+1)$-Tensor mit folgenden Eigenschaften:

1. Linearität: $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$
2. Leibnizsche Produktregel: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$
3. vertauscht mit Kontraktionen: $\nabla_\mu (T^\lambda{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu{}^\lambda{}_{\lambda\rho}$
4. auf Skalar angewandt gleich der partiellen Ableitung: $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich die kovarianten Ableitungen für Vektoren, 1-Formen und Tensoren:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\nu &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \\ \nabla_\mu \omega_\nu &= \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda \\ \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} \\ &\quad + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} + \ldots \\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_k} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_k} - \ldots \end{aligned}$$

die $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ heißen dabei *Verbindungs-Koeffizienten*.

(KR) ***Definition:*** **Torsions-Tensor**

S. 59

Aussage: Seien $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ beliebige Verbindungs-Koeffizienten, dann ist die wie folgt definierte Größe

$$T_{\mu\nu}{}^{\lambda} := \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \equiv 2\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$$

ein antisymetrischer Tensor, der als *Torsions-Tensor* bezeichnet wird.
Eine Verbindung heißt dabei *torsionsfrei*, wenn sie in ihren unteren Indizes symmetrisch ist.

(KR) ***Definition:*** **Kanonische kovariante Ableitung: Christoffel-Symbole**

S. 59f.

Aussage: Die eindeutige kanonische kovariante Ableitung auf einer Manigfaltigkeit M mit Metrik $g_{\mu\nu}$ ist eine kovariante Ableitung mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

1. Torsionsfreiheit: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}$
2. Metrik-Kompatibilität: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ (auf ganz M)

Mit Hilfe der drei Permutationen der Metrik-Kompatibilität, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ und $\nabla_\nu g_{\rho\mu} = 0$, erhält man folgende Gleichung:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda_\rho} = 0$$

Multiplikation mit $g^{\sigma\rho}$ ergibt die eindeutigen *Christoffel-Symbole*:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

(KR) ***Definition:*** **Riemannsche Geometrie**

S. 60

Aussage: Als *Riemannsche Geometrie* bezeichnet man das Studium von Manigfaltigkeiten mit einer Metrik $g_{\mu\nu}$ und deren zugehöriger kanonischer Verbindung, den Christoffel-Symbolen.

(KR) Kovariante Divergenz eines Vektors

S. 62f.

Aussage: Die *kovariante Divergenz* eines Vektors berechnet sich mit Hilfe von:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Dabei ist

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$$

(KR) Kovariante Äußere Ableitung

S. 62

Aussage: Die *kovariante äußere Ableitung* ist definiert als als die antisymmertisierte Partielle Ableitung, welche im Falle einer Torsions-freien (d.h. symmetrischen) Verbindung der antisymmetrisierten kovarianten Ableitung entspricht:

$$\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} - \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}\omega_\lambda = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]}$$

(KR) Vorgang der Einführung einer Riemannschen Manigfaltigkeit

S. 62f.

Aussage: *Einführung einer Riemannschen Manigfaltigkeit:*

	Menge
Einführung einer Topologie	↓
(offene Mengen)	↓
	Topologischer Raum
lokal wie $\mathbb{R}^n$	↓
	Manigfaltigkeit
Einführung einer Verbindung	↓
	Manigfaltigkeit mit Verbindung
Einführung einer Metrik	↓
	Riemannsche Manigfaltigkeit

(KR) Paralleltransport im gekrümmten Raum

S. 63ff.

Aussage: Im flachen Raum bleiben Vektoren beim Paralleltransport konstant. Im gekrümmten Raum wird das Resultat eines Paralleltransportes i.allg. vom Weg abhängen. Deshalb ist die Geschwindigkeit zweier Teilchen an verschiedenen Raumzeitpunkten nicht vergleichbar. Man fordert daher, daß beim Paralleltransport entlang eines Weges $x^\mu(\lambda)$ ein Tensor T konstant bleiben soll, was im flachen Raum $\frac{dT}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial T}{\partial x^\mu} = 0$ entspricht, d.h. der Operator

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu$$

angewendet auf T verschwinden soll:

$$\left(\frac{D}{d\lambda}T\right)^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = 0$$

Dies ist die *Gleichung für Paralleltransport*.

(KR) Paralleltransport bei Metrik-kompatibler Verbindung

S. 65

Aussage: Bei Metrik-kompatibler Verbindung wird die Metrik immer paralleltransportiert:

$$\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$$

Daraus folgt, daß das innere Produkt und damit die Norm von Vektoren beim Paralleltransport erhalten bleibt:

$$\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu}\right)V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{D}{d\lambda}V^\mu\right)W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\left(\frac{D}{d\lambda}W^\nu\right) = 0$$

Das bedeutet, daß der Charakter einer Geodäte (zeit-, licht- oder raumartig) sich niemals ändert.

(KR) Geodäten-Gleichung

S. 68f.

Aussage: Eine *Geodäte* (gerade Linie) ist die kürzeste Distanz zwischen zwei Punkten, oder (in der Relativitätstheorie sinnvoller) ein Weg $x^\mu(\lambda)$, der seinen eigenen Tangentialvektor $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ paralleltransportiert:

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Diese Gleichung nennt man *Geodäten-Gleichung*.
In kartesischen Koordinaten ist $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0$ und es ergibt sich die Gleichung für eine gerade Linie: $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$.

(KR) Verallgemeinerung des Newtonschen Gesetzes

S. 70

Aussage: Fügt man an die Geodäten-Gleichung einen Term für die Kraft an, so ergibt sich eine verallgemeinerte Version des Newtonschen Gesetzes:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m}F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Die Geodätengleichung beschreibt also den Weg nichtbeschleunigter Teilchen.

(KR) *Definition:* Affiner Parameter

S. 70f.

Aussage: Ein Parameter der auf folgende Weise mit der Eigenzeit τ zusammenhängt

$$\tau \to \lambda = a\tau + b$$

heißt *affiner Parameter* und ist ein ebenso guter Parameter für eine Geodäte wie die Eigenzeit.

(KR) Zeitartige Geodäten und die Eigenzeit

S. 71f.

Aussage: Zeitartige Geodäten sind Maxima der Eigenzeit:

1. *Extrema:* denn Geodäten sind Wege kürzester Distanz
2. *Maxima:* denn Geodäten lassen sich durch Stücke lichtartiger Kurven annähern, sind daher infinitesimal von der Weglänge Null entfernt

Beim *Zwillingsparadoxon* wird daher derjenige Zwilling älter, der zuhause bleibt, da er sich auf einer Geodäte befindet und seine Eigenzeit somit maximal ist.

(KR) *Definition:* Exponentielle Abbildung auf einer Manifaltigkeit

S. 72f.

Aussage: Sei $x^\mu(\lambda)$ eine Geodäte durch den Punkt p mit $\lambda(p) = 0$ und der Tangentialvektor in p

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}(\lambda = 0) = k^\mu$$

Dann gibt es einen eindeutigen Punkt auf der Manigfaltigkeit M mit $\lambda = 1$ und eine eine *exponentielle Abbildung*, die wie folgt definiert ist:

$$\exp_p(k^\mu) = x^\nu(\lambda = 1)$$

Die Tangentialvektoren definieren dabei ein Koordinatensystem, in dem sich jede Geodäte durch p darstellen läßt als:

$$x^\mu(\lambda) = \lambda k^\mu$$

(KR) *Definition:* Geodätisch unvollständige Manigfaltigkeit

S. 73

Aussage: Eine Manigfaltigkeit, auf der sich der Wertebereich einer exponentiellen Abbildung im Punkt p aufgrund von Singularitäten nicht auf ganz T_p erstreckt, heißt *geodätisch unvollständig*. Diese Singularitäten kann man sich als Rand der Manigfaltigkeit vorstellen.

(KR) Riemann-Tensor: Motivation und Definition

S. 74ff.

Aussage: Der *Riemann-Tensor* soll ein Maß für die Krümmung des Raumes sein. Die Idee ist, die Änderung eines Vektors bei parallelem Transport entlang einer infinitessimalen Schleife um einen Raumpunkt zu berechnen. Wir konstruieren diese Schleife mit Hilfe von kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda \nabla^\rho \\ &=: R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T_{\mu\nu}{}^\lambda \nabla_\lambda \nabla^\rho \\ \Rightarrow \quad R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \end{aligned}$$

Da in der zweitletzten Zeile links und ganz rechts Tensoren stehen, muß auch der Riemann-Tensor ein Tensor sein. Der Riemann-Tenor ist antisymmetrisch in seinen letzten beiden Indizes. Er ist nur mit Hilfe der Verbindung konstruiert und daher unabhängig von der Metrik.

(KR) Kommutator der kovarianten Ableitungen eines Tensors

S. 76

Aussage:

$$\begin{aligned} [\nabla_\rho, \nabla_\sigma] X^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = &- T_{\rho\sigma}{}^\lambda \nabla_\lambda X^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &+ R^{\mu_1}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + R^{\mu_2}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \ldots \\ &- R^\lambda{}_{\nu_1\rho\sigma} X^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} - R^\lambda{}_{\nu_2\rho\sigma} X^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} - \ldots \end{aligned}$$

(KR) *Definition:* Kommutator zweier Vektorfelder

S. 76

Aussage:

$$[X, Y]^\mu := X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu$$

(KR) Torsions- und Riemann-Abbildung in Kommutatorschreibweise

S. 76f.

Aussage:

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

wobei

$$\nabla_X := X^\mu \nabla_\mu$$

(KR) Symmetrien und Freiheitsgrade des Riemann-Tensors

S. 78ff.

Aussage: Eigenschaften von $R_{\rho\sigma\mu\nu} := g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$ in Riemannschen Normal-Koordinanten:

1. antisymmetrisch in den ersten beiden Indizes: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$
2. antisymmetrisch in den letzten beiden Indizes: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$
3. invariant unter Austausch des ersten und zweiten Indexpaars: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho}$
4. die Permutation der letzten drei Indizes verschwindet: $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$ oder $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$

Da $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ ein Tensor ist, gelten diese Eigenschaften in allen Koordinatensystemen. Insgesamt ergeben sich aus diesen Symmetrien

$$\frac{1}{12} n^2 \left(n^2 - 1\right)$$

unabhängige Komponenten des Riemann-Tensors, d.h. 0, 1, 6 bzw. 20 Komponenten in 1, 2, 3 bzw. 4 Dimensionen. Eindimensionale Manigfaltigkeiten sind also nie gekrümmt (z.B. S^1).

(KR) Bianchi-Identität

S. 80f.

Aussage: In Riemannschen Normal-Koordinaten ergibt sich für den Riemann-Tensor:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

oder mit Hilfe von $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$$

die *Bianchi-Identität*, ähnlich der Jacobi-Identität, da sie im wesentlichen

$$[[\nabla_\lambda, \nabla_\rho]\nabla_\lambda] + [[\nabla_\lambda, \nabla_\rho]\nabla_\lambda] + [[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\nabla_\lambda] = 0$$

ausdrückt.

(KR) *Definition:* Ricci-Tensor

S. 81

Aussage: Der *Ricci-Tensor* ist die ohne Metrik durchgeführte Kontraktion der 1. und 3. Komponente des Riemann-Tensors:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$$

Ist der Ricci-Tensor auf einer Manigfaltigkeit mit Christoffel-Verbindung definiert, ist er symmetrisch in seinen Indizes:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

(KR) ***Definition:*** **Ricci-Skalar**

S. 81

Aussage: Der *Ricci-Skalar* entsteht mit Hilfe einer Metrik $g^{\mu\nu}$ aus dem Ricci-Tensor:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

(KR) ***Definition:*** **Einstein-Tensor**

S. 81

Aussage: Der *Einstein-Tensor* definiert sich zu:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

(KR) Zweifach kontrahierte Bianchi-Identität

S. 81

Aussage: Kontrahiert man die Bianchi-Identität zweifach, so ergibt sich:

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R$$

oder kurz:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

(KR) ***Definition:*** **Weyl-Tensor**

S. 82

Aussage: Der *Weyl-Tensor* besteht im wesentlichen aus dem Riemann-Tensor ohne dessen Kontraktionen:

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} := R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(n-2)} \left(g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho} \right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R\, g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma}$$

(KR) Konformale Transformationen

S. 82

Aussage: Ein Tensor $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ heißt *invariant unter konformalen Transformationen* bzw. *konformaler Tensor*, wenn gilt:

$$g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = \Omega^2(x) g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu}$$

wobei $\Omega^2(x)$ eine beliebige nichtverschwindende Funktion der Raumzeit darstellt.

(KR) Eigenschaften des Weyl-Tensors

S. 82

Aussage: Der Weyl-Tensor

1. besitzt alle Symmetrie-Eigenschaften des Riemann-Tensors
2. ist nur in $D \geq 3$ Dimensionen definiert
3. verschwindet in 3 Dimensionen
4. erfüllt für $D \geq 4$ Dimensionen die Bianchi-Identität
5. ist invariant unter konformalen Transformationen

(KR) Positive/Negative Raumkrümmung

S. 85f.

Aussage: Ein Punkt auf einer Manigfaltigkeit heißt positiv gekrümmt, wenn sich der Raum in jede Richtung auf die gleiche Weise krümmt. Ein Punkt heißt negativ gekrümmt, wenn sich der Raum in gegensätzliche Richtungen krümmt, wie z.B. bei einem Sattel.

(KR) Geodätische Abweichung

S. 85ff.

Aussage: Die Vorstellung der „Parallelität" macht in gekrümmten Räumen keinen Sinn. Sei daher $\gamma_s(t)$ eine Familie von Geodäten mit $s \in \mathbb{R}$ und dem affinen Parameter t, die glatt eine zweidimensionale Oberfläche mit den Koordinanten s und t beschreiben. Dann gibt es *Tangentialvektoren an die Geodäten*:

$$T^{\mu} := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial t}$$

und *Abweichungsvektoren*:

$$S^{\mu} := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial s}$$

sowie die *Relativgeschwindigkeit der Geodäten*:

$$V^{\mu} := (\nabla_T S)^{\mu} \equiv T^{\rho} \nabla_{\rho} S^{\mu}$$

und die *Relativbeschleunigung der Geodäten*:

$$a^{\mu} := (\nabla_T V)^{\mu} \equiv T^{\rho} \nabla_{\rho} V^{\mu}$$

(KR) Geodätische Abweichungsgleichung

S. 87f.

Aussage: Die geodätischen Tangentialvektoren T^μ und die geodätischen Abweichungsvektoren S^μ sind Basisvektoren eines Koordinatensystems, also:

$$[S,T]=0$$

Im torsionsfreien Fall gilt daher:

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu$$

Dann ergibt sich für die Relativbeschleunigung der Geodäten:

$$a^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma$$

die sogenannte *Geodätische Abweichungsgleichung*.

(KR) *Definition:* Vielbein

S. 88f.

Aussage: Eine Menge von orthonormalen Basisvektoren, d.h. für die gilt:

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab},$$

heißt *Vielbein* (Zweibein, Dreibein, Vierbein usw.). Die alten Basisvektoren lassen sich mit Hilfe der neuen wie folgt ausdrücken:

$$\hat{e}_{(\mu)} = e^a_\mu \hat{e}_{(a)}$$

mit

$$e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \qquad e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b,$$

Eine Orthonormalbasis für $T^\star_p$ erhält man mit Hilfe von:

$$\hat{\theta}^{(a)}(\hat{e}_{(b)}) = \delta^a_b$$

(KR) *Definition:* Lokale Lorentz-Transformationen (LLT)

S. 90

Aussage: Transformationen der Form

$$\hat{e}_{(a)} \to \hat{e}_{(a')} = \Lambda_{a'}{}^a(x)\, \hat{e}_{(a)}$$

heißen *lokale Lorentz-Transformationen (LLT)*, wobei die $\Lambda_{a'}{}^a(x)$ inverse raumzeitabhängige Lorentzmatrizen darstellen.

(KR) *Definition:* Allgemeine Koordinaten-Transformationen

S. 90

Aussage: Als *allgemeine Koordinaten-Transformationen* bezeichnet man einen raumzeitunabhängigen Wechsel der Koordinaten.

(KR) *Definition:* Spin-Verbindung

S. 91

Aussage: Die *Spin-Verbindung* $\omega_\mu{}^a{}_b$ definiert sich über

$$\nabla_\mu X^a{}_b = \partial_\mu X^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c X^c{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b X^a{}_c$$

Der Name kommt von der Tatsache, daß man damit auch Spinoren kovariant ableiten kann.

(KR) Maurer-Cartan-Gleichungen

S. 92f.

Aussage: Die folgenden Gleichungen für den Torsions- und den Riemann-Tensor

$$\begin{aligned} T^a &= \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \\ R^a{}_b &= \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \end{aligned}$$

heißen *Maurer-Cartan-Gleichungen*.

4 Gravitation (GR)

(GR) Die beiden Teile der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 97

Aussage: Die allgemeine Relativitätstheorie zerfällt in zwei Teile:

1. *Gravitation:* wie die Krümmung des Raumes sich auf Materie auswirkt
2. *Raumkrümmung:* wie Energie und Impuls den Raum beeinflussen, d.h. krümmen

(GR) Das Schwache Äquivalenz-Prinzip (WEP)

S. 97

Aussage: Das *schwache Äquivalenz-Prinzip* besagt, die *Inertialmasse* (träge Masse) m_i und die *Gravitationsmasse* (schwere Masse) m_g eines jeden Objektes gleich sind:

$$m_i = m_g$$

Die Inertialmasse definiert sich dabei über

$$\vec{f} = m_i \vec{a}$$

und die Gravitationsmasse über

$$\vec{f}_g = -m_g \vec{\nabla}\Phi.$$

Für frei fallende Teilchen heißt das, daß die Beschleunigung unabhängig von der Masse ist:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$$

(GR) Einsteinsches Äquivalenzprinzip

S. 99

Aussage: Das *Einsteinsche Äquivalenzprinzip* lautet:

> *In genügend kleinen Regionen der Raumzeit reduzieren sich die Gesetze der Physik zu denen der allgemeinen Relativitätstheorie; es ist dort unmöglich, die Existenz eines Gravitationsfeldes zu entdecken.*

(GR) *Definition:* „Unbeschleunigt“ im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 100

Aussage: „Unbeschleunigt“ bzw. „frei fallend“ im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie bedeutet: *sich frei bewegend in Gegenwart jedwedem Gravitationsfeldes.*

(GR) Bezugssystem in der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 101

Aussage: Gegeben seien zwei frei fallende Objekte in genügender Entfernung. Dann ist das eine Objekt im allgemeinen beschleunigt gegenüber dem Bezugssystem des anderen. Daher definiert man in der allgemeinen Relativitätstheorie *lokale Inertialsysteme*, welche in genügend kleinen Regionen der Bewegung frei fallender Teilchen folgen.
Diese lokalen Inertialsysteme korrespondieren mit der Möglichkeit auf einer Manigfaltigkeit in jedem Punkt Riemannsche Normalkoordinaten zu konstruieren, d.h. Koordinaten in denen die Metrik ihre kanonische Form annimmt und die Christoffel-Symbole verschwinden.

(GR) *Beispiel:* Rotverschiebung

S. 102f.

Inhalt: Zwei Objekte sind in Flugrichtung die Strecke z von einander entfernt und erfahren beide die konstante Beschleunigung a. Das zweite Objekt, das dem ersten folgt, sendet ein Photon in Richtung des ersten aus. Wenn das Photon das erste Objekt erreicht, hat dieses eine um $\Delta v = a\Delta t = az/c$ höhere Geschwindigkeit, so daß die Wellenlänge des Photons um

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{az}{c^2}$$

Doppler-verschoben ist. Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip besagt nun, daß dasselbe in einem gleichförmigen Gravitationsfeld passieren muß: Ein von der Erdoberfläche ausgesandtes Photon sollte daher in der Höhe z eine Rotverschiebung von

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a_g z}{c^2}$$

haben. Allgemein ist $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ und daher:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{c}\int \nabla\Phi dt = \frac{1}{c^2}\int \partial_z \Phi dz \overset{(c=1)}{=} \Delta\Phi$$

wobei $\Delta\Phi$ die totale Änderung des Gravitationspotentials darstellt.

(GR) Bahn unbeschleunigter Teilchen

S. 104

Aussage: Im *flachen Raum* bewegen sich unbeschleunigte Teilchen auf geraden Linien:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \qquad (*)$$

Nach dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip gilt dies auch für den *gekrümmten Raum*, wenn die x^μ Riemannsche Normalkoordinaten darstellen. Die Tensorgleichung, die sich bei verschwindenden Christoffel-Symbolen auf $(*)$ reduziert ist die Geodätengleichung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Unbeschleunigte Teilchen bewegen sich also in der allgemeinen Relativitätstheorie auf Geodäten.

(GR) *Definition:* Newtonscher Grenzfall

S. 104f.

Aussage: Der *Newtonsche Grenzfall* beinhaltet drei Bedingungen:

1. Teilchen bewegen sich langsam (im Verhältnis zu c):

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$$

2. das Gravitationsfeld ist schwach (d.h. annähernd flacher Raum):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

3. das Gravitationsfeld ist statisch (ändert sich nicht mit der Zeit):

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}\right) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}$$

(GR) Das Kovarianz-Prinzip

S. 106

Aussage: Dem *Kovarianzprinzip* zufolge erhält man ein physikalisches Gesetz in der allgemeinen Relativitätstheorie, indem man

1. ein Gesetz des flachen Raumes nimmt
   → Äquivalenzprinzip: dieses Gesetz gilt auch in Gegenwart von Gravitation, wenn man Riemannsche Normalkoordinaten benutzt
2. es in eine Beziehung zwischen Tensoren übersetzt
   → z.B. partielle durch kovariante Ableitungen ersetzen

⇒ die Tensor-Version gilt in jedem Koordinatensystem.

Problem: Nicht immer eindeutig: z.B. kommutieren die partiellen, nicht aber die kovarianten Ableitungen.

(GR) Einsteinsche Feldgleichungen (mit Motivation)

S. 109ff.

Aussage: Ausgangspunkt ist die Poisson-Gleichung mit Newtonschem Potential:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Eine erste Verallgemeinerung ist

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00},$$

da der Newtonsche Grenzfall der Geodätengleichung $h_{00} = -2\Phi$ ergibt. Versucht man tensoriell zu verallgemeinern, erhält man

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \qquad \kappa = \text{ konstant}$$

Problem: Die Erhaltung von Energie und Impuls fordert:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$$

Im Gegensatz zur Bianchi-Identität: $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$. Daher führt man den *Einstein-Tensor*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

ein und erhält:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Im Newtonschen Grenzfall ergibt sich $\kappa = 8\pi G$ und somit erhält man die *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Die Gleichungen lassen sich auch über die Variation einer Wirkung

$$S_H = \int \mathcal{L}_H \, d^n x \qquad \text{mit} \quad \mathcal{L}_H = \sqrt{-g}\, R$$

bezüglich der Metrik herleiten (Hilberts Ansatz).

(GR) Schwache Energie-Bedingung (WEC)

S. 117

Aussage: Bei der *schwachen Energie-Bedingung* verlangt man, daß der Energie-Impuls-Tensor *positive* Energiedichten widerspiegelt:

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0 \qquad \forall \text{ zeitartige Vektoren } V^\mu$$

(GR) Kosmologische Konstante

S. 118

Aussage: Eine Möglichkeit, die Einsteinschen Feldgleichungen zu modifizieren, ist die Einführung einer *kosmologischen Konstante* Λ. Für die Vakuum-Feldgleichungen ergibt sich dann:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Dabei läßt sich der letzte Term als „Energiedichte des Vakuums“, $T_{\mu\nu}^{(vak)} = \Lambda g_{\mu\nu}$, interpretieren.
Eine natürliche Skala der kosmologischen Konstante wäre die Planckmasse:

$$\Lambda \sim m_P^4 \qquad \approx 10^{19}\mathrm{GeV}$$

Allerdings ist die aktuelle Grenze auf Λ etwa 10^{120} mal kleiner.

(GR) Die Einsteinschen Feldgleichungen als Anfangswertproblem

S. 121ff.

Aussage: Da die Einsteinschen Feldgleichungen kovariant sind, gibt es keine ausgezeichnete „Zeit“. Daher nimmt man eine raumartige Hyperfläche Σ, auf der man die Anfangswerte vorgibt, und versucht, daraus eine zukünftige Hyperfläche zu bestimmen. Konkret gibt man die Werte der Metrik auf Σ als Ortskoordinaten $g_{\mu\nu}|_\Sigma$ und die Zeitableitungen $\partial_t g_{\mu\nu}|_\Sigma$ als Impulse an.
Da die vier $G^{0\nu}$-Komponenten keine zweiten Ableitungen der Zeit enthalten, können die vier Gleichungen

$$G^{0\nu} = 8\pi\, G\, T^{0\nu}$$

nur als Einschränkungen für die Anfangswerte verwandt werden. Die übrigen sechs Gleichungen

$$G^{ij} = 8\pi\, G\, T^{ij}$$

sind dynamische Gleichungen für die Metrik $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ mit 10 Komponenten. Es bleiben 4 Freiheitsgrade für Eichungen.

(GR) Eichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie

S. 123f.

Aussage: *Eichungen* in der allgemeinen Relativitätstheorie sind Koordinatentransformationen. Eine populäre Wahl ist die *harmomische Eichung*:

$$\Box x^\mu = 0$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box := \nabla^\mu \nabla_\mu$, die x^μ sind dabei Funktionen, nicht Vektor-Komponenten. Die Eichbedingung lautet also:

$$0 = \Box x^\mu = g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma x^\mu - g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \partial_\lambda x^\mu = -g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}$$

(GR) Misner-Raumzeit

S. 126f.

Aussage: Unter einer *Misner-Raumzeit* versteht man eine 2-dimensionale Raumzeit mit $\mathbb{R}^1 \times S^1$ und einer Metrik, bei der die Lichtkegel mit der Zeit “umfallen“, so daß man ab einem bestimmten Zeitpunkt auf einer lichtartigen Kurve sich einmal um S^1 herum wieder zum Ausgangspunkt bewegen kann (sogennante *geschlossene zeitartige Kurven*).

5 Mehr Geometrie (MG)

(MG) *Definition:* Zurückziehen einer Funktion

S. 129

Aussage: Seien M und N Manigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, $\phi : M \to N$ eine Abbildung von M nach N und $f : N \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf N. Dann heißt die zusammengesetzte Abbildung

$$\phi_\star f := (f \circ \phi), \qquad \phi_\star : M \to \mathbb{R}$$

Zurückziehen der Funktion f.

(MG) *Definition:* Vorwärtstreiben eines Vektors

S. 129f.

Aussage: Seien M und N Manigfaltigkeiten der Dimensionen m und n mit Koordinatensystemen x^μ und y^α, $\phi : M \to N$ eine Abbildung von M nach N, $f : N \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf N und $V(p)$ ein Vektor bei einem Punkt p auf M. Dann heißt der Vektor

$$(\phi^\star V) f := V(\phi_\star f)$$

bei einem Punkt $\phi(p)$ auf N *vorwärtsgetriebener Vektor*.
Angewand auf eine Testfunktion ergibt sich:

$$(\phi^\star V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f$$

und man definiert die vorwärtstreibende Matrix

$$(\phi^\star)^\alpha{}_\mu := \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$$

Diese muß nicht unbedingt invertierbar sein.

(MG) ***Definition:*** **Zurückziehen eines Tensors**

S. 131

Aussage: Sei T ein $(0,l)$-Tensor (nur untere Indizes!), dann ist das Zurückziehen dieses Tensors definert als:

$$(\phi_\star T)\,(V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(l)}) := T(\phi^\star V^{(1)}, \phi^\star V^{(2)}, \ldots, \phi^\star V^{(l)})$$

daraus ergibt sich:

$$(\phi_\star T)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$$

(MG) ***Definition:*** **Vorwärtstreiben eines Tensors**

S. 131

Aussage: Sei S ein $(k,0)$-Tensor (nur obere Indizes!), dann ist das Vorwärtstreiben dieses Tensors definert als:

$$(\phi^\star S)\,(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}) := S(\phi_\star \omega^{(1)}, \phi_\star \omega^{(2)}, \ldots, \phi_\star \omega^{(k)})$$

daraus ergibt sich:

$$(\phi^\star S)^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$$

Ist die Abbildung ϕ *invertierbar*, läßt das Vorwärtstreiben für einen (k,l)-Tensor T definieren:

$$\begin{aligned} & (\phi^\star T)\,(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(l)}) \\ := \; & T(\phi_\star \omega^{(1)}, \phi_\star \omega^{(2)}, \ldots, \phi_\star \omega^{(k)}, [\phi^{-1}]^\star V^{(1)}, [\phi^{-1}]^\star V^{(2)}, \ldots, [\phi^{-1}]^\star V^{(l)}) \end{aligned}$$

und damit:

$$(\phi^\star T)^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}$$

Diese Transformation (mit Hilfe eines Diffeomorphismus) heißt *aktive* Koordinatentransformation, im Gegensatz zur traditionellen *passiven* Koordinationtransformation, auch wenn bei beiden exakt das Gleiche getan wird.
Bildet der Diffeomorphismus ϕ von M nach M ab, dann stellt die letzte Gleichung das Tensortransformationsgesetz dar.

(MG) Parametrisierung einer Manigfaltigkeit mit Hilfe von Diffeomorphismen

S. 134

Aussage: Gegeben sei eine Manigfaltigkeit M und eine Familie von Diffeomorphismen ϕ_t. Die Wirkung einer gesamten Familie auf einen Punkt p ist eine Kurve auf M. Nun definiert man den Vektor $V^\mu(x)$ als Tangentialvektor an jede dieser Kurven in jedem Punkt, ausgewertet bei $t = 0$. Dann decken diese Kurven ganz M ab.
Beispiel: die Diffeomorphismen $\phi_t(\theta, \phi) := (\theta, \phi + t)$ auf der Kugeloberfläche S^2.

(MG) Integralkurven

S. 134f.

Aussage: Gegeben sei ein Vektorfeld $V^\mu(x)$ auf einer Manigfaltigkeit M, dann heißen diejenigen Kurven x^μ *Integralkurven* für die gilt:

$$\frac{dx^\mu}{dt} := V^\mu$$

in Umkehrung der Parametrisierung einer Manigfaltikgeit mit Hilfe von Diffeomorphismen. Das Vektorfeld $V^\mu(x)$ heißt dabei *Generator* der Diffeomorphismen.

(MG) ***Definition:*** **Lie-Ableitung**

S. 135f.

Aussage: Als *Lie-Ableitung* eines Tensors bezeichnet man

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} := \lim_{t\to 0} \left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}}{t} \right)$$

wobei

$$\Delta_t T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(p) := \phi_{t\star}\left[T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(\phi_t(p))\right] - T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(p)$$

die Änderung des Tensors T entlang der Integralkurven darstellt.
Angewandt auf Funktionen reduziert sich die Lie-Ableitung zur gewöhnlichen Ableitung von Funktionen:

$$\mathcal{L}_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f$$

(MG) Lie-Klammern

S. 136f.

Aussage: Gegeben sei ein Koordinatensystem, in dem x^1 entlang den Integralkurven zeigt. Dann ist

$$V = \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad \Rightarrow \qquad V^\mu = (1, 0, \ldots, 0)$$

und die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes $U^\mu(x)$ wird zu

$$\mathcal{L}_V U^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1}$$

und

$$[V, U]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1}$$

Da aber V und U Vektoren sind, muß dies in jedem Koordinatensystem gelten:

$$\mathcal{L}_V U^\mu = [V, U]^\mu$$

Daher wird der Kommutator auch als *Lie-Klammern* bezeichnet.

(MG) Berechnung der Lie-Ableitung

S. 137f.

Aussage: Die Lie-Ableitung eines Tensorfeldes T berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} &= V^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &\quad -(\nabla_\lambda V^{\mu_1})\, T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} - (\nabla_\lambda V^{\mu_2})\, T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} - \ldots \\ &\quad +(\nabla_{\nu_1} V^{\lambda})\, T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} + (\nabla_{\nu_2} V^{\lambda})\, T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} + \ldots\end{aligned}$$

Dabei lassen sich die kovarianten Ableitungen auch durch die partiellen ersetzen, da die Christoffel-Symbole herausfallen.

(MG) Lie-Ableitung der Metrik

S. 138

Aussage:

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} = 2\,\nabla_{(\mu} V_{\nu)}$$

(MG) *Definition:* Symmetrie eines Tensors

S. 139f.

Aussage: Ein Diffeomorphismus ϕ heißt *Symmetrie eines Tensors* T, wenn T invariant unter Zurückziehen durch ϕ ist:

$$\phi_\star T = T \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}_V T = 0$$

(MG) *Definition:* Isometrie

S. 140

Aussage: Ein Diffeomorphismus, der die Symmetrie einer Metrik ist, d.h.

$$\phi_\star g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 0$$

heißt *Isometrie*. Das die Diffeomorphismenfamilie $\phi_{t\star}$ erzeugende Vektorfeld $V^\mu(x)$ nennt man *Killing-Vektorfeld* und

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} V_{\nu)} = 0$$

Killing-Gleichung.

(MG) Eigenschaften von Killing-Vektoren

S. 140

Aussage: Killing-Vektoren zeigen Erhaltunsgrößen bei der freien Bewegung von Teilchen an: Sei $x^\mu(\lambda)$ eine Geodäte mit Tangential-Vektor $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ und V^μ ein Killing-Vektor, dann gilt:

$$U^\nu \nabla_\nu (V_\mu U^\mu) = U^\nu U^\mu \nabla_\nu V_\mu + V_\mu U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0$$

aufgrund der Killing- und der Geodäten-Gleichung. Das heißt die Größe

$$V_\mu U^\mu$$

ist entlang der Weltlinie des Teilchens erhalten. Dies rührt daher, daß sich in Richtung des Killing-Vektors die Metrik nicht ändert.

(MG) *Definition:* Maximal symmetrischer Raum

S. 140

Aussage: Unter einem *maximal symmetrischen Raum* versteht man einen Raum, der die größtmögliche Anzahl an Killing-Vektoren enthält. Bei einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit sind das

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

6 Schwache Felder und Gravitationsstrahlung (SF)

(SF) Einsteinsche Feldgleichungen für schwache Felder

S. 142

Aussage: Im Falle schwacher Felder

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

ergeben sich die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\ \text{mit} \quad G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\Box h)\end{aligned}$$

(SF) Die linearisierten Einsteingleichungen in harmonischer Eichung

S. 146

Aussage: Bei harmonischer Eichung

$$\Box x^\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$$

reduzieren sich die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen zu

$$\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h = -16\pi G T_{\mu\nu}$$

und im Vakuum zur gewöhnlichen relativistischen Wellengleichung:

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

(SF) Multipolentwicklung der Gravitation

S. 158

Aussage: Für die linearisierten Einsteingleichungen mit

$$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1$$

gilt:

$$h_{ij} \sim \frac{d^2 q_{ij}(t_{ret})}{dt^2} \qquad \text{mit} \qquad q_{ij} := 3\int d^3y\; y^i y^j\, T^{00}$$

wobei q_{ij} als *Quadrupolmoment* der Energiedichte der Quelle bezeichnet wird und

$$t_{ret} := t - R$$

die *retardierte Zeit* darstellt.

(SF) Gravitationsstrahlung eines binären Sterns

S. 159ff.

Aussage: Ein binärer Stern besteht aus zwei Sternen, die einander umkreisen. Mit Hilfe der Einsteinschen Feldgleichung im Vakuum bis zur 2. Ordnung erhält man folgende Beziehung für die gravitative Strahlungsleistung des binären Sterns:

$$P = \frac{2}{5}\frac{G^4 M^5}{r^5}$$

Hulse und Taylor haben dies anhand des binären Systems PSR1913+16 im Jahre 1974 verifiziert und erhielten dafür im Jahre 1993 den Physik-Nobelpreis.

7 Schwarzschild-Lösung und Schwarze Löcher (SL)

(SL) *Definition:* Schwarzschild-Lösung

S. 164

Aussage: Unter der *Schwarzschild-Lösung* versteht man eine volle Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für sphärisch symmetrische Vakuum-Raumzeiten.
Dem *Birkhoff-Theorem* zufolge stellt die Schwarzschild-Lösung zugleich die *einzige* Lösung der Einstein-Gleichungen in sphärisch symmetrische Vakuum-Raumzeiten dar.

(SL) *Definition:* Sphärisch Symmetrisch

S. 164

Aussage: Eine Raumzeit heißt *sphärisch symmetrisch*, wenn sie die gleichen Symmetrien besitzt wie eine 2-Sphäre, d.h. der Kommutator aller Killing-Vektoren der gleiche ist.
Eine 2-Sphäre hat 3 Symmetrien und daher 3 Killling-Vektoren. Diese können so gewählt werden, daß für sie gilt:

$$\begin{aligned}[V^{(1)}, V^{(2)}] &= V^{(3)}\\ [V^{(2)}, V^{(3)}] &= V^{(1)}\\ [V^{(3)}, V^{(1)}] &= V^{(2)}\end{aligned}$$

Diese Relationen entsprechen denen der SO(3), der Gruppe der Drehungen in 3 Dimensionen.

(SL) *Definition:* Schichtung einer Manigfaltigkeit

S. 165

Aussage: Eine Manigfaltigkeit kann *geschichtet* werden, wenn es Untermanigfaltigkeiten gibt, so daß jeder Raumpunkt auf genau einer dieser Untermanigfaltigkeiten liegt und diese den gesamten Raum abdecken.
Beispiel: Ein sphärisch symmetrischer Raum kann als Schichtung von Sphären aufgefaßt werden.

(SL) Schichtung in maximal symmetrische Untermanigfaltigkeiten

S. 166

Aussage: Gegeben sei eine n-dimensionale Manigfaltigkeit, die in m-dimensionale, maximal symmetrische Untermanigfaltigkeiten geschichtet werden kann. Dann gibt es m Koordinaten-Funktionen u^i auf den Untermanigfaltigkeiten und $n-m$ Koordinaten-Funktionen v^I, die angeben auf welcher Untermanigfaltigkeit man sich befindet, so daß die Metrik auf der gesamten Manigfaltigkeit die Form

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{IJ}(v)\,\mathrm{d}v^I\mathrm{d}v^J + f(v)\,\gamma_{ij}(u)\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

annimmt. D.h. es gibt keine gemischten Terme $\mathrm{d}v^I\mathrm{d}u^j$ und $g_{IJ}(v)$ und $f(v)$ sind unabhängig von den u^i. Dabei ist $\gamma_{ij}(u)$ die Metrik auf der Untermanigfaltigkeit.
Beweis: Wird nicht gegeben.

(SL) ***Definition:*** **Stationäre Metrik**

S. 169

Aussage: Eine Metrik heißt *stationär*, wenn sie einen zeitartigen Killing-Vektor besitzt. D.h. Bewegung ist nur auf symmetrische Weise möglich.
Jede sphärisch symmetrische Metrik besitzt einen zeitartigen Killing-Vektor und ist daher stationär.
Beispiel: Ein rotierender Stern oder ein rotierendes schwarzes Loch.

(SL) ***Definition:*** **Statische Metrik**

S. 169

Aussage: Eine Metrik heißt *statisch*, wenn sie einen zeitartigen Killing-Vektor besitzt, der orthogonal zu einer Familie von Hyperflächen ist. D.h. es ist keine Bewegung möglich.
(Eine Hyperfläche einer n-dimensionalen Manigfaltigkeit ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermanigfaltigkeit.)
Beispiel: Ein nichtrotierender Stern oder ein nichtrotierendes schwarzes Loch oder ein symmetrischer kollabierender Stern (die Quelle muß nicht statisch sein).

(SL) Schwarzschild-Metrik

S. 170

Aussage: Die Metrik, die sich ergibt, wenn man die Einsteinschen Feldgleichungen für sphärisch symmetrische Vakuum-Raumzeiten zu lösen versucht, heißt *Schwarzschild-Metrik*:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$$

Bei $r = 0$ und $r = 2GM$ werden die Koeffizienten unendlich groß. Es stellt sich allerdings heraus, daß nur bei $r = 0$ eine Singularität vorliegt, während bei $r = 2GM$ die Wahl der Koordinaten lediglich eine Singularität vortäuscht. Man sieht das, wenn man einen Skalar aus dem Riemann-Tensor bildet

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12G^2M^2}{r^6},$$

der nur bei $r = 0$ eine Singularität besitzt.

(SL) ***Definition:*** **Asymtotische Flachheit**

S. 171

Aussage: Ein Raum mit einer Metrik, die für $r \to \infty$ minkowskisch wird, heißt *asymptotisch flach*.

(SL) Schwarzschild-Metrik im Falle der Sonne

S. 170

Aussage: Die Sonne hat einen Radius von

$$R_{Sonne} = 10^6 GM_{Sonne}$$

und der Radius $r = 2GM$ liegt daher weit innerhalb der Sonne. Die Schwarzschild-Metrik im Innern der Sonne ergibt sich zu

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right) \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$$

dabei geht die Funktion $m(r)$ schneller gegen Null als r selbst.

(SL) Killing-Vektoren der Schwarzschild-Metrik

S. 174

Aussage: In der Schwarzschild-Metrik gibt es vier Killing-Vektoren: Invarianz unter Zeit-Translationen führt zur Erhaltung der Energie und Invarianz unter räumlichen Drehungen führt zur Erhaltung der drei Komponenten des Drehimpulses. Konkret ergibt sich für den zeitartigen Killing-Vektor $K = \partial_t$

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = E$$

und für Killing-Vektor $K = \partial_\phi$, der zur Erhaltung des Drehimpulses führt:

$$L_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2\theta) \qquad \Rightarrow \qquad r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L$$

Die letzte Gleichung entspricht dem 2. Keplerschen Gesetz, wonach gleiche Räume in gleichen Zeiten überstrichen werden.

(SL) Bewegungsgleichungen eines Test-Teilches in der Schwarzschild-Metrik

S. 174ff.

Aussage: Für die *Bewegungsgleichungen eines Test-Teilches in der Schwarzschild-Metrik* erhält man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}E^2$$

mit

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2\,r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

wobei

$$\epsilon := -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{für ein massives Teilchen} \\ 0 & \text{für ein lichtartiges Teilchen} \\ -1 & \text{für ein raumartige Geodäten} \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichung entspricht exakt der eines klasssischen Teilchens, lediglich dem Potential $V(r)$ ist der letzte Term hinzugefügt. Dieser führt zu großen Unterschieden bei $r \to 0$: Im klassischen Fall steigt das Potential zu $+\infty$ an, im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie fällt das Potential zu $-\infty$ hin ab.

1. klassischer Fall:
   (a) masselose Teilchen: unendlich hohe Potentialbarriere
   → nähern sich und entfernen sich dann wieder
   (b) massive Teilchen: Kreisbahnen und oszillierende Orbits bis zu einer bestimmten Energie E_0
   → darüber: ähnlich masselosen Teilchen
2. allgemein-relativistischer Fall: innerhalb von $r = 2\,GM$ ist das schwarze Loch
   (a) masselose Teilchen: überwindbare Potentialbarriere
   → für $L = 0$ ist diese nicht vorhanden
   → bei $r = 3\,GM$: instabile Kreisbahnen (auf der Barriere)
   (b) massive Teilchen: Kreisbahnen bei

   $$r = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12\,G^2M^2L^2}}{2\,GM}$$

   d.h. für große L gibt es eine stabile & eine instabile Kreisbahn
   $r = 6\,GM$ ist der kleinste mögliche Radius mit stabiler Kreisbahn

(SL) Schildkröten-Koordinate

S. 182f.

Aussage: Untersucht man die Lichtkegel für ein Schwarzes-Loch in der Schwarzschild-Metrik auf radialen Nullkurven, d.h. für konstantes θ und ϕ folgt aus

$$0 = ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2$$

daß

$$\lim_{r\to 2\,GM}\frac{dt}{dr} = \lim_{r\to 2\,GM} \pm\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)^{-1} = \pm\infty \qquad (\star)$$

d.h. die Lichtkegel fokussieren immer stärker für $r \to 2\,GM$ und für einen Betrachter weit außerhalb bewegt sich ein Lichtstrahl immer langsamer auf $r = 2\,GM$ zu. Der Strahl selbst hat aber keine Probleme $r = 2\,GM$ zu erreichen und zu durchqueren.
Die Illusion rührt daher, daß ein Fortschritt in der r-Koordinate immer langsamer vor sich geht. Um dieses Manko des Koordinatensystems zu beheben für man die *Schildkröten-Koordinate* $r^\star$ ein:

$$r^\star := r + 2\,GM\ln\left(\frac{r}{2\,GM} - 1\right),$$

so daß wir $(\star)$ lösen können:

$$t = \pm r^\star + \text{konstant}$$

(SL) Eddington-Finkelstein-Koordinaten

S. 183ff.

Aussage: Untersucht man die Lichtkegel für ein Schwarzes-Loch in der Schwarzschild-Metrik auf Null-Geodäten, so ergeben sich als natürliche Koordinaten die *Eddington-Finkelstein-Koordinaten*

$$\tilde{u} = t + r^\star$$
$$\tilde{v} = t - r^\star$$

wobei $r^\star$ die Schildkröten-Koordinate darstellt. Einfallende Null-Geodäten haben $\tilde{u} =$ konstant, ausgehende Null-Geodäten haben $\tilde{v} =$ konstant. Für die Metrik ergibt sich mit $\tilde{u}$ und r als Koordinaten:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right) \mathrm{d}\tilde{u}^2 + (\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}r + \mathrm{d}r\mathrm{d}\tilde{u}) + r^2 d\Omega^2, \qquad (\star)$$

so daß bei $r = 2\,GM$ keine Singularität vorliegt. Für radiale Null-Kurven ($\theta, \phi =$ konstant) erhält man:

$$\frac{d\tilde{u}}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{einfallende radiale Nullkurven} \\ 2\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)^{-1} & \text{ausgehende radiale Nullkurven} \end{cases}$$

d.h. die Lichtkegel fallen für $r \to 0$ immer mehr um. Ab $r = 2\,GM$ gibt es keine Rückkehr mehr, man nennt diesen Punkt daher *Ereignis-Horizont* und den Bereich $r \leq 2\,GM$ *Schwarzes Loch*.
Wählt man $\tilde{v}$ und r anstelle von $\tilde{u}$ und r als Koordinaten, so erhält man dieselbe Gleichung wie ($\star$) nur mit $\tilde{v}$ anstatt $\tilde{u}$. Jetzt kann man durch $r = 2\,GM$ nur entlang Wegen gehen, die in die Vergangenheit führen.

(SL) Kruskal-Koordinaten

S. 186f.

Aussage: Verwendet man Eddington-Finkelstein-Koordinaten für die Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)(\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v} + \mathrm{d}\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{u}) + r^2 d\Omega^2,$$

so ist der Ereignishorizont $r = 2\,GM$ unendlich weit entfernt. Um ihn in endliche Werte zu bringen, wählt man

$$u' := e^{\frac{\tilde{u}}{4\,GM}}$$
$$v' := e^{\frac{-\tilde{v}}{4\,GM}},$$

wobei u' und v' beide Null-Koordinaten sind. Um eine raum- und eine zeitartige Koordinate zu erhalten, definiert man daher

$$u := \frac{1}{2}(u' - v')$$
$$v := \frac{1}{2}(u' + v')$$

Dabei ist v die zeitartige Koordinate. Für die Metrik ergibt sich in diesen *Kruskal-Koordinaten*:

$$ds^2 = \frac{32\,G^3M^3}{r} e^{\frac{-r}{2\,GM}} (-\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}u^2) + r^2 d\Omega$$

Radiale Null-Kurven liegen wie im flachen Raum bei

$$v = \pm u + \text{konstant}$$

Der Ereignishorizont liegt dabei bei $v = \pm u$. Oberflächen mit $r =$ konstant liegen auf Parabeln:

$$u^2 - v^2 = \text{konstant}$$

(SL) Kruskal-Diagramm

S. 188ff.

Aussage: Siehe *Lecture Notes*, Seiten 188-190.
Man beachte auch die Wurmlöcher auf S. 190.

(SL) Weiße Zwerge und Neutronen-Sterne

S. 191f.

Aussage: In einem Stern besteht ein Gleichgewicht aus dem Druck, der durch die Verbrennung von Kernbrennstoff im Innern entsteht, und der Gravitiationskraft. Wenn der gesamte Brennstoff verbraucht ist, sinkt die Temperatur und der Stern fängt an, in sich zusammenzufallen. Das geht solange, bis die Elektronen so nahe beieinander sind, daß sie nach dem Paulischen Ausschlußprinzip nicht weiter zusammengepreßt werden können. Ein solches Objekt heißt *weißer Zwerg*. Ist die Masse und damit die Gravitationskraft jedoch groß genug, werden die Elektronen mit den Protonen in einem dramatischen Phasenübergang verschmelzen und ein *Neutronenstern* entsteht, der fast ausschließlich aus Neutronen aufgebaut ist.

(SL) Penrose-Koordinaten

S. 192ff.

Aussage: Die Metrik des Minkowski-Raumes in Polarkoordinaten lautet:

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$$

mit

$$-\infty < t < +\infty, \qquad 0 \le r < +\infty$$

Nun gehen wir zu Null-Koordinaten über:

$$u = \frac{1}{2}(t+r) \qquad v = \frac{1}{2}(t-r)$$

mit

$$-\infty < u < +\infty, \qquad -\infty < v < +\infty, \qquad v \le u$$

Die Idee ist nun, ein Diagramm zu haben, bei dem die gesamte Raumzeit auf ein Stück Papier paßt. Daher führt man Koordinaten mit einem endlichen Geltungsbereich ein:

$$U = \arctan u \qquad V = \arctan v$$

mit

$$-\frac{\pi}{2} < U < +\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < V < +\frac{\pi}{2}, \qquad V \le U$$

Wechselt man nun wieder zurück zu einer raum- und einer zeitartigen Koordinate zurück

$$\eta = U + V \qquad \chi = U - V$$

mit

$$-\pi < \eta < +\pi, \qquad 0 \le \chi < +\pi \qquad (\star)$$

erhält man die Metrik als

$$ds^2 = \omega^{-1}(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\, d\Omega^2)$$

mit $\omega := \frac{1}{2}(\cos\eta + \cos\chi)$. D.h. die Metrik kann als eine konformale Transformation einer Metrik $d\bar{s}^2 = \omega^2 ds^2$ verstanden werden, die eine statische, instabile Lösung der Einstein-Gleichungen mit einem perfekten Fluid und einer kosmologischen Konstante darstellt. Wegen $(\star)$ kann man nun die gesamte Raumzeit auf ein Stück Papier bringen.

(SL) Penrose-Diagramm

S. 196f.

Aussage: Siehe *Lecture Notes*, Seiten 196-197.

(SL) Schwarze Löcher haben keine Haare

S. 198

Aussage: Unter der Eigenschaft von schwarzen Löchern, *keine Haare zu haben* versteht man, daß ein Schwarzes Loch unabhängig von seiner Vorgeschichte allein durch Masse, Ladung und Drehmoment beschrieben werden kann (d.h. es ist thermodynamisch).

(SL) Hawking-Strahlung

S. 199f.

Aussage: Obwohl schwarze Löcher alles schlucken, strahlen sie doch wie schwarzer Körper mit einer Temperatur von

$$T = \frac{\hbar}{8\pi\, kGM}$$

wobei k die Boltzmann-Konstante darstellt. Die Quantenfeldtheorie sagt Vakuum-Fluktuationen vorher, spontane Erzeugung und Vernichtung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren, die normalerweise nicht zu entdecken sind, da die durchschnittliche Energie Null ist. Fällt nun der eine Partner in das Schwarze Loch und der andere entkommt, so hat das schwarze Loche Energie ausgesandt und muß daher Energie verlieren (das hineinfallende Teilchen besitzt sozusagen negative Energie).
Nebenbei: Dabei geht Information verloren, obwohl die Informationserhaltung grundlegend für die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenfeldtheorie ist. Dies ist ein aktueller Forschungsgegenstand.

(SL) Reissner-Nordstrøm-Metrik

S. 201f.

Aussage: Gegeben sei ein geladenes schwarzes Loch in einer sphärisch symmetrischen Raumzeit. Dann läßt sich die Metrik schreiben als

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}\,\mathrm{d}t^2 + e^{2\beta(r,t)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$$

Der Energie-Impulstensor des Elektromagnetismus ist

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$$

Die Feldgleichungen, die nun zu lösen sind, bestehen aus den Einsteinschen und den Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= 0 \\ \nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} &= 0 \end{aligned}$$

und als Lösung erhält man die Reissner-Nordstrøm-Metrik:

$$ds^2 = -\Delta\,\mathrm{d}t^2 + \Delta^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$$

mit

$$\Delta := 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G\,(p^2+q^2)}{r^2}$$

(q und p bezeichnen die elektrische und magnetische Gesamtladung) und den folgenden elektromagnetischen Felder:

$$F_{tr} = -\frac{q}{r^2}, \qquad F_{\theta\phi} = p\sin\theta$$

(SL) *Definition:* Nackte Singularität

S. 202

Aussage: Eine Singularität heißt *nackt*, wenn sie nicht durch einen Ereignishorizont abgeschirmt wird.

(SL) Vermutung der kosmischen Zensur

S. 203

Aussage: Die *Vermutung von der kosmischen Zensur* besagt, daß der Gravitationskollaps von physikalischer Materie niemals eine nackte Singularität erzeugt.

(SL) Kerr-(Newman-)Metrik

S. 207f.

Aussage: Für ein rotierendes schwarzes Loch in der Schwarzschild-Metrik mit axialer Symmetrie ergibt sich die Kerr-Metrik:

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \frac{2GM}{\rho^2}(a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}t)^2$$

mit

$$\Delta(r) := r^2 - 2GMr + a^2 \qquad \text{und} \qquad \rho^2(r,\theta) := r^2 + a^2\cos^2\theta$$

Die Koordinaten (t, r, θ, ϕ) heißen dabei *Boyer-Lindquist-Koordinaten.* Nimmt man elektrische und magnetische Ladung hinzu, indem man $2GMr$ durch $2GMr - (q^2+p^2)/G$ ersetzt, erhält man die Kerr-Newman-Metrik.

(SL) *Definition:* Killing-Tensor

S. 206

Aussage: Ein *Killing-Tensor* ist ein symmetrischer $(0, n)$-Tensor $\xi_{\mu_1\ldots\mu_n}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu_1\ldots\mu_n)} = 0$$

Beispiel: Die Metrik selbst und symmetrisierte Tensorprodukte von Killing-Vektoren.

(SL) Lösungen der Kerr-Metrik

S. 209ff.

Aussage: Singularitäten der Kerr-Metrik mit

$$\Delta(r) := r^2 - 2GMr + a^2 \qquad \text{und} \qquad \rho^2(r,\theta) := r^2 + a^2\cos^2\theta$$

ergeben sich bei $\Delta = 0$ und $\rho = 0$. Im ersten Fall ist nur $G^2M^2 > a^2$ physikalisch sinnvoll. Folgende Flächen sind hier von Interesse:

- zwei Ereignishorizonte bei $r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2}$
- der *Killing-Horizont* (die Killingvektoren erfüllen hier $\zeta^\mu\zeta_\mu = 0$) bei $(r - GM)^2 = G^2M^2 - a^2\cos^2\theta$
- die *Ergosphäre*, die Region zwischen Killing- und äußerem Ereignis-Horizont

Im Fall von $\rho = 0$ liegt eine echte Singularität vor, die einen Ring bei

$$r = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

darstellt (die Punkte bei $r = 0$ liegen auf einer Scheibe).

(SL) Der Penrose-Prozeß

S. 213f.

Aussage: Ausgangspunkt ist ein Schwarzes Loch in der Kerr-Metrik (rotierend mit axialer Symmetrie). Ausgehend von der Ergosphäre bewegt sich ein Astronaut mit einem Felsenbrocken auf einer Geodäte auf das schwarze Loch zu. Dort wirft er den Felsen auf bestimmte Weise. Dabei gilt Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\begin{aligned} p^\mu_{\text{Astr.+Fels}} &= p^\mu_{\text{Astronaut}} + p^\mu_{\text{Fels}} \\ \Rightarrow \qquad E_{\text{Astr.+Fels}} &= E_{\text{Astronaut}} + E_{\text{Fels}} \end{aligned}$$

Penrose hat nun gezeigt, daß man so werfen kann, daß

$$E_{\text{Fels}} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{\text{Astronaut}} > E_{\text{Astr.+Fels}}$$

und man auf einer Geodäte das schwarze Loch wieder verläßt. Daher besitzt man *mehr* Energie als vorher und hat so dem schwarzen Loch Energie entzogen.

8 Kosmologie (KO)

(KO) *Definition:* Isotropie

S. 217

Aussage: Ein Raum ist *isotrop*, wenn er von jedem Punkt aus in alle Richtungen gleich aussieht. *Formal:* Eine Manigfaltigkeit M heißt isotrop, wenn für jeden Punkt p auf M gilt: Für je zwei Vektoren V und W aus T_pM gibt es eine Isometrie, daß der unter der Isometrie vorwärtsgetriebene Vektor W parallel zu V ist.

(KO) Homogenität

S. 217

Aussage: Ein Raum ist *homogen*, wenn die Metrik in jedem Punkt gleich ist.
Formal: Seien p und q Punkte auf einer Manigfaltigkeit M, dann gibt es eine Isometrie, die p nach q bringt.

(KO) Kopernikanisches Prinzip

S. 217

Aussage: Unter dem *Kopernikanischen Prinzip* versteht man die Aussage, daß das Universum für große Skalen überall gleich, d.h. isotrop und homogen ist.

(KO) Robertson-Walker-Metrik

S. 217ff.

Aussage: Alle Galaxien entfernen sich von uns. Daher nehmen wir unser Universum als homogen, isotrop und veränderlich in der Zeit an, d.h. es kann in raumartige Stücke Σ geschichtet werden, die alle homogen und isotrop sind, was wiederum zur Folge hat, daß sie maximal symmetrisch sind. Daher setzt man folgende Metrik an:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\gamma_{ij}(u)\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

mit den raumartigen Koordinaten u^i auf Σ und der maximal symmetrischen Metrik γ_{ij} auf Σ. Die Funktion $a(t)$ heißt dabei *Skalenfaktor*, der die Größe von Σ zum Zeitpunkt t angibt. Die diese Metrik beschreibenden Koordinaten $(t, u^1, u^2, u^3,)$ heißen *comoving coordinates* (mitbewegte oder Ko-Koordinaten). Nutzt man nun aus, daß γ_{ij} maximal symmetrisch ist, erhält man die *Robertson-Walker-Metrik*:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right]$$

mit

$$k = \begin{cases} -1 & \Sigma \textit{ offen} \text{ (konstante negative Krümmung)} \\ 0 & \Sigma \textit{ flach} \text{ (keine Krümmung)} \\ +1 & \Sigma \textit{ geschlossen} \text{ (konstante positive Krümmung)} \end{cases}$$

(KO) Strahlungs- und Materie-dominierte Universen

S. 221f.

Aussage: Universen können als perfekte Flüssigkeit angesehen werden. Wichtige Beispiele sind:

1. *Staub:* kollisionslose, nichtrelativistische Materie
2. *Strahlung:* elektromagnetische Strahlung oder massive Teilchen, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen

Alle perfekten Flüssigkeiten gehorchen einer Zustandsgleichung für die Energiedichte ρ und den Druck p:

$$p = \omega\rho,$$

wobei ω konstant und zeitunabhängig ist. Aufgrund der Energieerhaltung ergibt sich:

$$\rho \propto a^{-3\,(1+\omega)},$$

wobei a der Skalenfaktor ist. Die beiden Arten von Universen bezeichnet man als

1. *Materie-dominierte Universen:* bestehen aus Staub mit $\omega = 0$ und daher
$$\rho \propto a^{-3}$$
2. *Strahlungs-dominierte Universen:* bestehen aus Strahlung mit $\omega = \frac{1}{3}$ und daher
$$\rho \propto a^{-4}$$

(KO) Friedmann-Robertson-Walker-Universen

S. 219/222f.

Aussage: *Friedmann-Robertson-Walker-Universen* bestehen aus der *Robertson-Walker-Metrik*

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right)\right]$$

zusammen mit den *Friedmann-Gleichungen*

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$
$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

(KO) *Definition:* Hubble-Parameter

S. 223

Aussage: Den *Hubble-Parameter* definiert man als

$$H := \frac{\dot a}{a}$$

Aktuelle Messungen liegen bei 40 – 90 km/sec/Mpk, wobei Mpk für Megaparsek steht, was 3×10^{24} cm entspricht, und a der Skalenfaktor ist.

(KO) *Definition:* Abbremsungs-Parameter

S. 223

Aussage: Der *Abbremsungs-Parameter* q ist definiert als

$$q := \frac{a\ddot a}{\dot a^2}$$

(KO) *Definition:* Dichte-Parameter und kritische Dichte

S. 223f.

Aussage: Der *Dichte-Parameter* Ω ist definiert als

$$\Omega := \frac{8\pi G}{3H^2}\,\rho = \frac{\rho}{\rho_{\text{krit}}} = \frac{k}{H^2 a^2} + 1$$

wobei man unter *kritischer Dichte* die folgende Größe versteht:

$$\rho_{\text{krit}} := \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Das Vorzeichen von k bestimmt die Art des Universums:

$$\begin{array}{lclclcl} k=-1 & \Leftrightarrow & \Omega<1 & \Leftrightarrow & \rho<\rho_{\text{krit}} & \Leftrightarrow & \text{offenes Universum} \\ k=0 & \Leftrightarrow & \Omega=1 & \Leftrightarrow & \rho=\rho_{\text{krit}} & \Leftrightarrow & \text{flaches Universum} \\ k=+1 & \Leftrightarrow & \Omega>1 & \Leftrightarrow & \rho>\rho_{\text{krit}} & \Leftrightarrow & \text{geschlossenes Universum} \end{array}$$

(KO) Urknall und Big Crunch

S. 224

Aussage: Betrachten wir unser Universum als Friedmann-Robertson-Walker-Universum ohne kosmische Konstante ($\Lambda = 0$), positiver Energiedichte ($\rho > 0$), und nichtnegativem Druck $p \geq 0$). Dann ergeben die Friedmann-Gleichungen

$$\ddot a < 0.$$

Da wir beobachten, daß das Universum expandiert ($\dot a > 0$), bedeutet dies, daß das Universum *abbremst*. Wäre $\ddot a$ exakt Null, brächte uns eine Gerade in der a-t-Ebene direkt zur Singularität bei $a = 0$, dem Beginn des Universums vor H_0^{-1}. Da aber $\ddot a < 0$ ist das Universum jünger. Die Singularität bei $a = 0$ nennt man den *Urknall*.
Für $k = +1$ (geschlossenes Universum) gibt es eine weitere Singularität, und zwar in der Zukunft, den *Big Crunch* (das „große Zermalmen“).
Für $k = 0$ bzw. -1 expandiert das Universum immer weiter.

(KO) Das Hubblesche Gesetz

S. 229ff.

Aussage: Als *Luminositäts-Entfernung* bezeichnet man die folgende Größe:

$$d_L^2 := \frac{L}{4\pi F}$$

wobei L die absolute Leuchtkraft (Luminosität) der Quelle und F der Fluß, der vom Beobachter gemessen wird, darstellt.
Die Luminositäts-Entfernung läßt sich nun mit Hilfe des *Hubbleschen Gesetzes* berechnen:

$$d_L = H_0^{-1}\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)\,z^2 + \ldots\right]$$

Die Variable z bezeichnet dabei die Rotverschiebung, d.h.

$$z := \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$$

Daher ermöglicht die Messung von Luminositäts-Entfernungen die Bestimmung von H_0 und q_0, welche grundlegend für die Entscheidung sind, in welchem Friedmann-Robertson-Walker-Universum wir leben.

9 Quantengravitation (QG)

(QG) Masse des Gravitons

S. 213ff. (T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, [2]1995)

Aussage: Für schwache Felder

$$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1$$

reduzieren sich die Einsteinschen Feldgleichungen auf die linearisierten Feldgleichungen

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}\right)$$

Im quellfreien Raum erhält man hieraus

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

In der Quantengravitationstheorie ist $h_{\mu\nu}$ die Wellenfunktion der Gravitonen. Analog zum elektromagnetischen Fall (Photonen: $\Box A^\mu = 0 \Rightarrow p^\mu p_\mu = 0 \Rightarrow E^2 = c^2p^2 \Rightarrow m = 0$) erhält man für das Graviton

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow p^\mu p_\mu = 0 \Rightarrow E^2 = c^2p^2 \Rightarrow m = 0$$

Die Masselosigkeit der Gravitonen führt zur unendlichen Reichweite der Gravitationswechselwirkung.

(QG) Spin des Gravitons

S. 295ff. (Sexl/Urbantke, Gravitation und Kosmologie, [4]1995)

Aussage: Als Quellen des Gravitationsfeldes stehen die 10 Komponenten von $T_{ik} = T_{ki}$ zur Verfügung, die durch Energie-Impulserhaltung

$$\partial^k T_{ik} = 0$$

auf sechs unabhängige Komponenten reduziert werden, entsprechend

- einem Spin-0-Feld (Spur $T = T^i_{\ i}$ von T_{ik}) und
- einem Spin-2-Feld

Es gibt nun 3 Möglichkeiten eine Theorie der Gravitation zu konstruieren:

1. skalare (Spin 0) Theorie (Nordstrøm): Lagrange-Funktion:

$$L_s = \frac{1}{2}\partial_i\phi\,\partial^i\phi - g\phi T + L_M$$

wobei L_M die Lagrange-Funktion der Materie darstellt.

2. Tensorielle (Spin 2) Theorie: Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_j\psi_{ik}\,\partial^j\psi^{ik} - 2\,\partial_j\psi_{ik}\,\partial^i\psi^{jk} - \partial^i\psi\,\partial_i\psi + 2\,\partial_k\psi^{ik}\,\partial_i\psi) - f\psi^{ik}T_{ik} + L_M$$

Eichinvarianz:

$$\psi_{ik} \to \psi_{ik} + \partial_k\Lambda_i + \partial_i\Lambda_k$$

Die Eichinvarianz projeziert aus den 10 Komponenten des Tensorfeldes ψ^{ik} genau Spin 2 heraus.

3. Skalar-Tensor-Theorie: Mischung von skalarer und tensorieller Theorie

Ein Spin-2-Teilchen, kann die Werte $m_s = 0, \pm1, \pm2$ annehmen. Allerdings lassen sich im Fall des Gravitons durch geeignete Koordinatenwahl die Helizitäten 0 und ±1 eliminieren, sind also physikalisch nicht relevant. Das Graviton besitzt daher die Helizitäten ±2.