Einführung in die Stochastik

Zusammenschrieb von Christof Degenhart

26. Januar 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Kombinatorik

Kombinatorik := "Kunst des Zählens"

1.1 Permutationen mit Wiederholung

Für die Menge $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von $|M| = n$ Elementen gilt:

$$|M^r| = |\{(a_1, \ldots, a_r) : a_s \in M \text{ für } 1 \leq s \leq r\}| = n^r \tag{1.1}$$

d.h.

> *Aus der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von n Elementen lassen sich auf n^r verschiedene Arten geordnete Proben mit Wiederholungen vom Umfang r entnehmen.*

1.2 Permutationen ohne Wiederholung

Für die Menge $M^{(r)} := \{(a_1, \ldots, a_n\} : a_s \in M$ paarweise verschieden, $1 \leq s \leq r\}, r \leq n$ gilt:

$$|M^{(r)}| = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.2}$$

d.h.

> *Aus der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von n Elementen lassen sich auf $\frac{n!}{(n-r)!}$ verschiedene Arten geordnete Proben ohne Wiederholungen vom Umfang r entnehmen, $r \leq n$.*

1.3 Kombination ohne Wiederholung

Fragestellung: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Objekten r verschiedene herauszugreifen? D.h. wieviele r-elementige Teilmengen enthält eine Menge von n Elementen?

Bezeichne $C(n, r)$ die Anzahl der r-elementigen Teilmengen von M, dann ist

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \tag{1.3}$$

d.h.

Aus einer Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von n Elementen lassen sich auf $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ verschiedene Arten ungeordnete Proben ohne Wiederholung vom Umfang r entnehmen.

Bemerkungen:

- für die Binominalkoeffizienten $\binom{n}{r}$ gilt die *binomische Formel:*

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} \tag{1.4}$$

- das Bildungsgesetz des *Pascalschen Dreiecks:*

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \tag{1.5}$$

- *Potenzmenge*[1] $\mathcal{P}(M)$ von M:

$$|\mathcal{P}(M)| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \overset{(1.4)}{=} (1+1)^n = 2^n \tag{1.6}$$

→ *Fermi-Dirac-Modell:* Partikel[2] nicht unterscheidbar; höchstens ein Teilchen pro Phasenraumzelle (Pauli-Verbot)

1.4 Kombination mit Wiederholung

Definition: $[a_1, \ldots, a_r] = [b_1, \ldots, b_r]$ genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_r)$ aus $(b_1, \ldots, b_r)$ durch Permutation der Indizes hervorgeht.

Für $M_n^r := \{[a_1, \ldots, a_r] : (a_1, \ldots, a_r) \in M^r\}$ gilt:

$$|M_n^r| = \binom{n+r-1}{r} \tag{1.7}$$

d.h.

Aus einer Menge $x_1, \ldots, x_n$ von n Elementen lassen sich auf $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$ verschiedene Arten ungeordnete Proben mit Wiederholung vom Umfang r entnehmen.

→ *Bose-Einstein-Modell:* Partikel[3] nicht unterscheidbar; in jeder Zelle des Phasenraums unbeschränkte Anzahl

Bemerkungen:

- für große $n \in \mathbb{N}$ gilt näherungsweise die *Stirlingsche Formel:*

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \tag{1.8}$$

- Definition: *Erzeugende Funktion* der Folge (a_n) mit $n = 0, 1, \ldots$:

$$t \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, |t| < \min(1, p), t \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

wobei $p := (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} > 0$.

[1] Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller ihrer Teilmengen: $\mathcal{P}(M) := \{x : x \subseteq M\}$.

[2] Z.B. Elektronen, Neutronen, Protonen.

[3] Z.B. Photonen.

Kapitel 2

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.1 Laplace-Verteilungen

Ω sein im folgenden eine nichtleere, endliche Menge.

2.1.1 Beispiel: Würfeln

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ergebnisses $\omega \in \{1, \ldots, 6\} =: \Omega$ ist

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \tag{2.1}$$

Für kompliziertere *Ereignisse*

- E_1: Gewürfelte Zahl gerade
- E_2: Gewürfelte Zahl 5 oder 6

ist $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ bzw. $P(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Und allgemein:

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) = \frac{|E|}{|\Omega|} \tag{2.2}$$

2.1.2 Definitionen: Laplace-Experiment

Sei Ω eine nicht leere, endliche Menge und $p : \Omega \to [0, 1]$ definiert durch $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \omega \in \Omega$ (Gleichwahrscheinlichkeit)

- das Paar (Ω, p) heißt *Laplace-Experiment*
- die Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ heißt *Laplacesche Wahrscheinlichkeitsverteilung* (*Laplace-Verteilung*) über Ω, wobei

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) = \frac{|E|}{|\Omega|}, \qquad E \subset \Omega \tag{2.3}$$

- die Teilmengen $E \subset \Omega$ heißen *Ereignisse*
- einelementige Teilmengen $\omega \subset \Omega$ heißen *Elementarereignisse*
- die Elemente $\omega \in \Omega$ *Ergebnisse*
- die leere Menge $\emptyset$ das *unmögliche Ereignis*
- die Grundmenge Ω das *sichere Ereignis*

Für $P(E^c)$ gilt:

$$P(E^c) = \frac{|\Omega \backslash E|}{|E|} = \frac{|\Omega| - |E|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|E|}{|\Omega|} = 1 - P(E) \tag{2.4}$$

2.1.3 Weitere Definitionen zum Laplace-Experiment

Seien E_1 und E_2 Teilmengen von Ω

- das Ereignis E_1 *oder* E_2 *tritt ein*: $E_1 \cap E_2$
- das Ereignis E_1 *und* E_2 *tritt ein*: $E_1 \cup E_2$
- das Ereignis E_1 *tritt nicht ein*: E_1^c
- *entweder* E_1 *oder* E_2 *tritt ein*: $E_1 \triangle E_2 := (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_1^c \cap E_2)$
- E_1 *und* E_2 *schließen sich aus*: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
- E_1 *hat* E_2 *zur Folge*: $E_1 \subset E_2$

Bemerkungen:

- Vereinigung disjunkter Mengen:

$$E_1 + E_2 := E_1 \cup E_2, \text{ falls } E_1 \cap E_2 = \emptyset \tag{2.5}$$

- *de Morgansche Regel:* für $E_i \subset \Omega$ gilt:

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} E_i^c \tag{2.6}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c \tag{2.7}$$

2.2 Endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

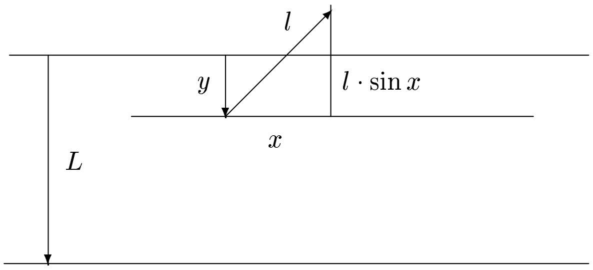
2.2.1 Das Buffonsche Nadelproblem

Fragestellung: Auf eine Fläche, in die zwei Parallelen im Abstand L eingezeichnet sind, werfe man Nadeln der Länge $l < L$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(E)$ schneidet eine Nadel eine Parallele?

Die mögliche Positionen der Nadeln

$$\{(y, x,) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < L, 0 \leq x \leq \pi\} \tag{2.8}$$

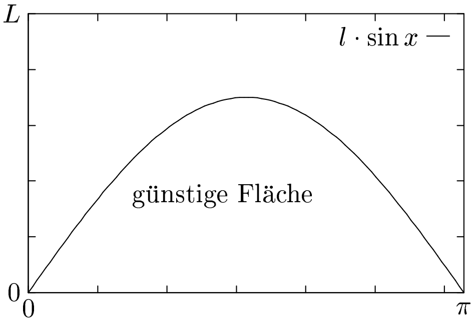
beschreiben ein Rechteck der Fläche $L \cdot \pi$.



Die Nadel in Position (y, x) schneidet, wenn $y \leq l \cdot \sin x$, d.h. bei Ereignissen

$$\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq L, 0 \leq x \leq \pi, y \leq l \cdot \sin x\} \tag{2.9}$$

mit der Fläche $\int_0^\pi l \cdot \sin x = 2l$:



Die Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot L} \tag{2.10}$$

ist hierbei i.A. keine rationale Zahl wie bei Laplace-Verteilungen gefordert. Es lassen sich also nicht alle Zufallsexperimente durch Laplace-Verteilungen beschreiben.

2.2.2 Definition: Endliches Zufallsexperiment

Sei $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $p(\omega) \geq 0 \ \forall \ \omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Dann nennt man die Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ die zu p gehörige *endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung* über Ω, wenn gilt

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega), \quad E \subset \Omega. \tag{2.11}$$

Das Paar (Ω, p) heißt *endliches Zufallsexperiment.*

2.2.3 Weitere Definitionen zum endlichen Zufallsexperiment

Binomialverteilung $\mathcal{B}(1, p_0)$ über $\Omega = \{0, 1\}$ mit Parameter $p_0 \in [0, 1]$:

$$p : \Omega \to [0, 1] \quad \text{mit} \quad p(0) := 1 - p_0; \quad p(1) := p_0 \tag{2.12}$$

$\to$ z.B. beim Würfel fällt eine 6: $\mathcal{B}(1, \frac{1}{6})$

Für ein endliches Zufallsexperiment (Ω, p) heißt die Menge

$$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : p(\omega) > 0\} \tag{2.13}$$

Träger der zu p gehörenden endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung P über Ω.

2.2.4 Eigenschaften von P

$$\begin{aligned}
&(\textit{nichtnegativ}) && P(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega) && (2.14)\\
&(\textit{normiert}) && P(\Omega) = 1 && (2.15)\\
&(\textit{endlich additiv}) && P\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \quad E_i \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ paarweise disjunkt} && (2.16)\\
& && P(\emptyset) = 0 && (2.17)\\
& && P(E^c) = 1 - P(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{P}(\Omega) && (2.18)\\
& && P(E) \leq 1 \quad \forall\, E \in \mathcal{P}(\Omega) && (2.19)\\
&(\textit{Subtraktivität}) && E \subset F \subset \Omega \Rightarrow P(F \cap E^c) = P(F) - P(E) && (2.20)\\
&(\textit{Isotonie}) && E \subset F \subset \Omega \Rightarrow P(E) \leq P(F) \leq 1 && (2.21)
\end{aligned}$$

Die Eigenschaften (2.17) bis (2.21) folgen aus (2.14) bis (2.16).

2.2.5 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Habe $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (2.14), (2.15) und (2.16), dann

- nennt man P nicht negative, normierte, endliche additive *Mengenfunktion*
- $\exists$ genau ein endliches Zufallsexperiment (Ω, p), so daß P die zu p gehörende endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω ist

2.3 Abzählbar unendliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Manchmal hat man es mit Experimenten zu tun bei denen unendlich viele Ergebnisse möglich sind. Ω ist im folgenden also eine nichtleere, abzählbar unendliche Menge.

2.3.1 Definition: Abzählbar unendliches Zufallsexperiment

Sei $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $p(\omega) \geq 0\ \forall\ \omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Dann nennt man die Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ die zu p gehörige *abzählbar unendliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung* über Ω, wenn gilt

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega), \quad E \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{2.22}$$

2.3.2 Eigenschaften von P

$$\begin{aligned}
&(\textit{nichtnegativ}) && P(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega) && (2.23)\\
&(\textit{normiert}) && P(\Omega) = 1 && (2.24)\\
&(\sigma - \textit{additiv}) && P\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i), \quad E_i \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ paarweise disjunkt} && (2.25)
\end{aligned}$$

2.3.3 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Habe $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (2.23), (2.24) und (2.25), dann

- nennt man P nicht negative, normierte, σ-additive *Mengenfunktion*
- $\exists$ genau ein abzählbar unendliches Zufallsexperiment (Ω, p), so daß P die zu p gehörende abzählbar unendliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω ist

2.3.4 Definition: Poisson-Verteilung

Als *Poisson-Verteilung* $\mathcal{P}(\lambda)$ bezeichnet man die abzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsverteilung $P : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$P(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \lambda > 0 \text{ fest.} \tag{2.26}$$

Bemerkungen:

- die Poisson-Verteilung beschreibt häufig endliche Zufallsexperimente näherungsweise recht gut, besonders, wenn die beobachteten Ereignisse recht selten sind
- der durch (2.13) eingeführte Begriff des Trägers läßt sich singemäß auf abzählbar unendliche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen. Für alle Poisson-Verteilungen ist offenbar $\mathbb{N}_0$ der Träger

2.3.5 Äquivalenz-Satz über endlich-additive Mengenfunktionen

Für eine abzählbar unendliche Menge Ω mit einer nicht negativen, normierten, endlich-additiven Mengenfunktion $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{a)} \qquad \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \leq 1 \tag{2.27}$$

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 \\ 2) & P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\}) \qquad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega) \\ 3) & P \text{ ist } \sigma\text{-additiv} \end{array}\right\} \tag{2.28}$$

2.3.6 Definition und Eigenschaften der asymptotischen Dichte

Definition

Die auf $\mathcal{S} := \{A \subset \mathbb{N} |\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1,\ldots,n\}|}{n} \text{ existiert}\}$ definierte Mengenfunktion

$$P(A) := \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}, A \in \mathcal{S} \tag{2.29}$$

heißt *asymptotische Dichte*.

Eigenschaften von $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}1)\quad \emptyset \in \mathcal{S}, \mathbb{N} \in \mathcal{S} \tag{2.30}$$

$$\mathcal{S}2)\quad A, B \in \mathcal{S}, A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{S} \tag{2.31}$$

$$\mathcal{S}3)\quad a \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{S} \tag{2.32}$$

$$\mathcal{S}4)\quad A \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \{a + k | a \in A\} =: A + k \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N} \tag{2.33}$$

Eigenschaften von P

$$P1)\quad P \text{ ist nicht negativ, normiert und endlich additiv} \tag{2.34}$$

$$P2)\quad P(\{n\}) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.35}$$

$$P3)\quad P(A + k) = P(A) \qquad \forall A \in \mathcal{S}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.36}$$

2.3.7 Eigenschaften endlich additiver Mengenfunktionen

Sei auf der abzählbaren Menge $\Omega \neq \emptyset$ eine nicht negative, normierte, endlich additive Mengenfunktion $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert, dann hat P folgende Eigenschaften[1]:

$$(\textit{Subtraktivität})\qquad A \subset B \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) \tag{2.37}$$

$$(\textit{Isotonie})\qquad A \subset B \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B) \leq 1 \tag{2.38}$$

$$P(A) \leq 1 \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{2.39}$$

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A) \tag{2.40}$$

$$P(\emptyset) = 0 \tag{2.41}$$

$$(\textit{Sub-Additivität})\qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad A_1, \ldots, A_n \subset \Omega \tag{2.42}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right), \qquad A_i \subset \Omega \text{ paarweise disjunkt} \tag{2.43}$$

$$(\textit{Siebformel})\qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \tag{2.44}$$

2.3.8 Definition: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge. Dann heißt eine nicht negative, normierte, σ-additive Mengenfunktion P auf $\mathcal{P}(\Omega)$ *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung* über Ω und für P gelten die Eigenschaften (2.37) bis (2.44).

Bemerkung

Aus (2.3) und (2.44) folgt für $|\Omega| = k, k \in \mathbb{N}$:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| \tag{2.45}$$

[1] Formel (2.44) wird auch *Siebformel von Sylvester und Pointcaré* genannt.

2.3.9 Beispiel zur Siebformel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einem Würfelwurf mit zwei Würfel wenigstens eine Augenzahl gerade?

Es ist $\Omega := \{(i,j)|i,j \in \{1,\ldots,6\}\}$ und $p : \Omega \to [0,1]$ mit $p((i,j)) = \frac{1}{36}$. Sei E_k das Ereignis, daß der Würfel k $(k = 1,2)$ eine gerade Augenzahl zeigt, also

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(2i,j)|i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,\ldots,6\}\} \\ E_2 &= \{(i,2j)|i \in \{1,\ldots,6\}, j \in \{1,2,3\}\} \end{aligned}$$

Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cup E_2)$:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$$

2.4 Eigenschaften diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.4.1 Definition: Konvergenz von Teilmengen

Sei (A_n) eine Folge von Teilmengen der Menge Ω

- A_n *konvergiert isoton* gegen $A \subset \Omega$, d.h. $A_n \uparrow A$, wenn

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{mit} \qquad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \tag{2.46}$$

- A_n *konvergiert antiton* gegen $A \subset \Omega$, d.h. $A_n \downarrow A$, wenn

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{mit} \qquad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \tag{2.47}$$

2.4.2 Weiterer Äquivalenzsatz über endlich additive Mengenfunktionen

Sei $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine nicht negative, normierte, endlich additive Mengenfunktion über die abzählbare Menge $\Omega \neq \emptyset$, dann ist äquivalent:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{σ-Additivität)} & P \text{ ist } \sigma\text{-additiv} & \\ \textit{(Stetigkeit von unten)} & \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) & \forall (A_n) \text{ mit } A_n \uparrow A \\ \textit{(Stetigkeit von oben)} & \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) & \forall (A_n) \text{ mit } A_n \downarrow A \\ \textit{(Antitone Null-Konvergenz)} & \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\emptyset) & \forall (A_n) \text{ mit } A_n \downarrow \emptyset \end{array}\right\} \tag{2.48}$$

2.4.3 Sub-σ-Additivität

Sei P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung über die abzählbare Menge $\Omega \neq \emptyset$, dann gilt für eine Teilmengenfolge (A_n) von Ω

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{2.49}$$

2.4.4 Definition: Dirac-Verteilung

Für eine abzählbare Menge $\Omega \neq \emptyset$ und $\omega \in \Omega$ heißt die diskrete Warscheinlichkeitsverteilung $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *Dirac-Verteilung* im Punkt ω, die definiert ist durch

$$\delta_\omega(A) := \begin{matrix} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{matrix} \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{2.50}$$

2.4.5 Dirac-Verteilung und Trägermengen

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge mit $p(\omega) \geq 0 \ \forall\, \omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ und Ω_0 Träger der zu p korrespondierenden diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung, dann gilt $(A \in \mathcal{P}(\Omega))$:

$$\left(\sum_{\omega \in \Omega_0} p(\omega)\, \delta_\omega\right)(A) := \sum_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) \cdot \delta_\omega(A) = P(A) \tag{2.51}$$

Kapitel 3

Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten

Fragestellung: Wie wirkt sich bei bestimmten Experimenten das Eintreten einen Ereignisses A auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B aus?

Sei im folgenden Ω eine nichtleere, abzählbare Menge und P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω.

3.1 Grundlegende Formeln

3.1.1 Definition: Elementare bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $A, B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$, dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3.1}$$

elementare bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B.

Bemerkung: Extremfälle

- für $B \subset A$ gilt: $P(A|B) = 1$
- für $A \cap B = \emptyset$ gilt: $P(A|B) = 0$

3.1.2 Elementare bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sei $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$, dann ist $P(\cdot|B) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch (3.1) eine *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung* über Ω.