Lernkartei Teilchenphysik

(http://www.uni-karlsruhe.de/~um3f/TeX/physik.html)

von Christof Degenhart

nach den Büchern

„*Teilchen und Kerne*“ von B. Povh *etal.*, [4]1997

und

„*Elementarteilchenphysik*“ von D. Griffiths, 1996

sowie

Bergmann-Schaefer: „*Teilchen*“, hrsgg. von W. Raith, 1992

(Bei den Seitenangaben bezieht sich eine Angabe „S. P*xx*“ auf Seite *xx* im Buch von Povh *etal.* und „S. G*xx*“ auf Seite *xx* im Buch von Griffiths, sowie „S. B*xx*“ auf Seite *xx* im Bergmann-Schaefer. Im Bergmann-Schaefer wurden nur die Seiten über Beschleuniger und Teilchendetektoren berücksichtigt)

Größenordnungen: Atom, Kern, Nukleon

S. P2, P6

Aussage: Typische Größenordnungen von Atom, Kern und Nukleon:

Objekt	ungefähre Größe	typische Anregungsenergien	typische Streuenergien
Atom	10^{-10} m	≥ 3 eV	10^4 eV
Kern	10^{-14} m	≥ 3 MeV	10^8 eV
Nukleon	10^{-15} m	≥ 0.3 GeV	10^9 eV

Unter *typischen Streuenergien* wird hier die Energie der (Licht-/Elektronen-)Strahlung verstanden, die benötigt wird, um das entsprechende Objekt zu verwenden.

Symmetrie: Definition und Eigenschaften

S. G117f.

Aussage: Definition Symmetrie:
Eine Symmetrie ist eine *Operation*, die man auf ein System anwenden kann und unter der es *invariant* bleibt.

Eigenschaften:

1. Abgeschlossenheit: mit R_i und R_j ist auch das Produkt R_iR_j eine Symmetrie
2. Einselement: $\exists I$ mit $IR_i = R_iI = R_i\ \forall R_i$
3. Inverses: $\forall R_i\ \exists R_i^{-1}$ mit $R_iR_i^{-1} = R_i^{-1}R_i = I$
4. Assoziativität: $R_i(R_jR_k) = (R_iR_j)R_k$

$\Rightarrow$ definiert eine Gruppe
→ gilt zusätzlich $R_iR_j = R_jR_i$ (Kommutativität), heißt die Gruppe *abelsch*.

Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen

S. P5/G117

Aussage: Ein Erhaltungssatz ist darauf zurückzuführen, daß die Wechselwirkung gegenüber einer kanonisch konjugierten Größe invariant ist (*Noether-Theorem*), z.B.

Erhaltungssatz		**Invarianz gegenüber**
Energie	←	Zeit
Impuls	←	Ort
Drehimpuls	←	Winkel

Kategorien von Experimenten in der Teilchenphysik

S. P5f.

Aussage: Es gibt grundsätzlich zwei *Kategorien von Experimenten in der Teilchenphysik*:

1. Streuung: testet Eigenschaften des Objekts und der Wechselwirkung
   → Strahl von Teilchen bekannter Energie & Impuls auf Objekt
   → elastische Streuung
   → z.B. Bestimmung der Kerngröße durch elastische Elektron-Streuung
2. Spektroskopie: testet Eigenschaften der angeregten Zustände und Wechselwirkung zwischen Konstituenten
   → Bestimmung der Zerfallsprodukte angeregter Zustände
   → meist inelastische Reaktionen

Detektortypen

S. P6f.

Aussage: Detektoren zum Nachweis von Teilchen lassen sich in folgende Kategorien einordnen:

1. Szintillatoren: schnelle Zeitinformation, moderate Ortsauflösung
2. Vieldraht-Gaskammern: gute Orts-/Impuls-Information
3. Halbleiterzähler: sehr gute Energie- & Ortsinformation
4. Čerenkov- und Übergangsstrahlungszähler: Teilchenidentifikation
5. Kalorimeter: Gesamtenergie (bei hohen Energien)

Entdeckung des Elektrons

S. P11

Aussage: Das *Elektron* wurde im Jahre 1997 in Cambridge von *Thomson* entdeckt, indem er in Entladungsröhren Teilchenstrahlen erzeugte, deren Masse und Ladung unabhängig von der Austrittkathode und vom Gas waren. Das Verhältnis beider Größen bestimmte er durch Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern.

Entdeckung des Atoms

S. P12

Aussage: Daß Atome im wesentlichen leer sind und sich in ihrem Innern stark konzentriert positive Ladungsträger befinden, bewiesen *Rutherford*, *Geiger* und *Marsden* Anfang des 20. Jahrhunderts durch Streuexperimente mit α-Teilchen (ionisierten ^{4}He-Atomen), die aus radioaktivem α-Zerfall stammten.

Entdeckung des Protons

S. P12

Aussage: *Rutherford* entdeckte, daß beim Beschuß von Wasserstoff und Stickstoff durch α-Teilchen (ionisierten ^{4}He-Atomen) positiv geladene Teilchen herausgeschleudert wurden, Protonen:

$$^{14}\mathrm{N} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + \mathrm{p}$$

Entdeckung des Neutrons

S. P12f.

Aussage: Auch das Neutron wurde durch Beschuß mit α-Teilchen (ionisierten ^{4}He-Atomen) entdeckt. Wegen ihrer Neutralität dauerte es aber bis 1932, als *Chadwick* sie durch Kollision mit Wasserstoff, Helium und Stickstoff nachweisen konnte, indem er die Rückstoßenergie dieser Kerne in einer Ionisationskammer maß.

Massendefekt

S. P13

Aussage: Als *Massendefekt* bezeichnet man die Differenz der Masse eines Systems und der Massen der Konstituenten des Systems. Das Phänomen war eines der ersten experimentellen Beweise der *Masse-Energie-Relation*

$$E = mc^2$$

Bei Atom-Kernen beträgt der Massendefekt etwa 1%.

Bestimmung der Ladungszahl eines Atoms

S. P13

Aussage: Die *Ladungszahl Z eines Atoms* bestimmt man, indem man es durch Elektronen, Protonen oder Synchrotronstrahlung anregt. Die dabei emittierte Röntgenstrahlung enthält die K_α-Linie ($n = 2, l = 1 \rightarrow n = 1, l = 0$), welche proportional zu $(Z-1)^2$ ist

$$E_{K_\alpha} \sim (Z-1)^2$$

dies bezeichnet man als *Moseley-Gesetz*.

Isobare, Isotope, Isotone

S. P14

Aussage: Nuklide (Elemente mit der Massenzahl A) ordnet man wie folgt:

1. *Isobare*: Nuklide mit gleicher Massenzahl A
2. *Isotope*: Nuklide mit gleicher Ladungszahl Z
3. *Isotone*: Nuklide mit gleicher Neutronenzahl N

Bindungsenergie eines Atoms

S. P14

Aussage: Die *Bindungsenergie eines Atoms* definiert man üblicherweise über die *Atommasse*, da diese wesentlich präziser als die Kernmasse gemessen werden kann:

$$E_B(Z,A) := \Big(Z\, M(^1\mathrm{H}) + (A-Z)\, M_n - M(A,Z) \Big) \cdot c^2$$

wobei ^{1}H die Masse des Wasserstoff-Atoms, M_n die Masse eines Neutrons und $M(A,Z)$ die Masse eines Atoms darstellt.

Massenbestimmung von Nukliden

S. P14ff.

Aussage: Es gibt zwei wichtige Verfahren zur *Massenbestimmung von Nukliden*:

1. Massenspektroskopie:
   Ionen werden zuerst durch ein E- und dann durch ein B-Feld abgelenkt. Dabei gilt für die Krümmungsradien:

$$r_E = \frac{M}{Q} \cdot \frac{v^2}{E} \qquad \text{und} \qquad r_B = \frac{M}{Q} \cdot \frac{v}{B}$$

   durch Festlegung von E und B kommen nur Ionen mit einem bestimmten Verhältnis $\frac{M}{Q}$ im Detektor an

2. Kernreaktionen:
   Die Bindungsenergie und dadurch die Masse läßt sich aus Kernreaktionen bestimmen, bei denen die Nuklidmassen bis auf eine bekannt sind und die kinetischen Energien gemessen werden. Ein Beispiel ist der Einfang thermischer Neutronen ($E_{kin} \approx 0.025$ eV) durch Wasserstoff:

$$\mathrm{n} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma$$

Weizsäcker-Massenformel

S. P19

Aussage: Die *Weizsäcker-Massenformel* wurde im Jahre 1935 als *phänomenologische Formel* zur Parametrisierung von *Kernmassen* in Abhängigkeit von A und Z eingeführt:

$$M(A,Z) = NM_n + ZM_p + Zm_e \underbrace{-a_v A}_{\text{Volumenterm}} \underbrace{+a_s A^{\frac{2}{3}}}_{\text{Oberflächenterm}} \underbrace{+a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}}_{\text{Coulombterm}} \underbrace{+a_a \frac{(N-Z)^2}{4A}}_{\text{Asymmetrieterm}} \underbrace{+\frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}}_{\text{Paarungsterm}}$$

Die Formel wird verständlich, wenn man

$$R \propto A^{\frac{1}{3}}$$

berücksichtigt:

- Volumenterm: Reichweite der Kernkraft kurz ⇒ 16 MeV pro Nukleon
  → würde jedes Nukleon mit jedem wechselwirken wäre er $\propto A(A-1)$
- Oberflächenterm: Bindung an der Kernoberfläche reduziert: $R^2 \propto A^{\frac{2}{3}}$
- Coulombterm: Abstoßung zwischen Protonen $\propto \frac{Z(Z-1)}{R} \propto \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$
- Asymmetrieterm: Kompensierung der Coulomb-Abstoßung durch Neutronenüberschuß
- Paarungsterm: Paare von n + p: gerade Zahl von Nukleonen erhöht Stabilität

Isospin

S. P22f.

Aussage: Betrachtet man die niedrigsten Energieniveaus von *Spiegelkernen* (Paaren von Isobaren), so sind diese sehr ähnlich. Man sieht lediglich eine Verschiebung der Niveaus durch unterschiedliche Coulombenergie. Man findet Tripletts und Singuletts von Zuständen. Wegen dieser Analogie zur Kopplung von Drehimpulsen (Spins), beschreibt man diese Symmetrie zwischen Protronen und Neutronen als *Isospin* I und bezeichnet beide als Zustände des *Nukleons* mit $I = \frac{1}{2}$:

$$\text{Nukleon: } I = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \text{Proton:} & I_3 = +\frac{1}{2} \\ \text{Neutron:} & I_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Die 3-Komponente des Isospins ist eine *additive Größe*:

$$I_3^{\text{Kern}} = \sum I_3^{\text{Nukleon}} = \frac{Z-N}{2}$$

Zerfallsgesetz

S. P26

Aussage: Die *Zerfallskonstante* λ bezeichnet die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Kerns pro Zeiteinheit. Sie hängt mit der *Lebensdauer* τ und der *Halbwertszeit* $t_{\frac{1}{2}}$ wie folgt zusammen:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Die *Aktivität* A definiert sich wie folgt

$$A := -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

woraus sich das *Zerfallsgesetz*, die zeitliche Abnahme der Aktivität ergibt:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{mit} \qquad N_0 := N(0)$$

β-Zerfall

S. P26ff.

Aussage: Es gibt zwei Arten von *β-Zerfällen*:

1. den β^--Zerfall:

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{W}^- \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$$

2. den β^+-Zerfall:

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{W}^+ \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$$

Außerdem gibt es bei *geraden Kernen* (Isobaren mit gerade Massenzahl) zum Teil den *doppelten β-Zerfall*: z.B.

$$^{106}_{48}\mathrm{Cd} \rightarrow {}^{106}_{46}\mathrm{Pd} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_e$$

Der Grund liegt darin, daß $^{106}_{47}$Ag energetisch höher liegt als $^{106}_{48}$Cd. Der doppelte β-Zerfall ist allerding sehr selten.

Elektronen-Einfang

S. P29f.

Aussage: Das die Elektronen der Atomhülle eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern haben, kann es zu *Elektronen-Einfang* kommen:

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_e$$

Meist werden Elektronen der K-Schale eingefangen, weil deren Radialwellenfunktion ein Maximum am Kernmittelpunkt aufweist. Der Elektronen-Einfang konkurriert mit dem β^+-Zerfall ($\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$).

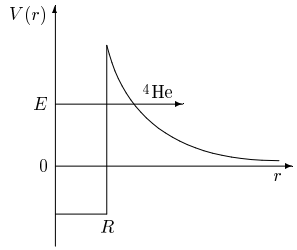
α-Zerfall

S. P31ff.

Aussage: Ein α-Teilchen besteht im wesentlichen aus 2 Protonen und 2 Neutronen (^{4}He) und hat eine sehr hohe Bindungsenergie von 7 MeV/Nukleon. Die Emission von α-Teilchen tritt auf, wenn der Atomkern dadurch Energie gewinnt (die Bindungsenergie des α-Teilchens wird frei) und das α-Teilchen aus dem Kernpotential (Kastenpotential mit Reichweite R) heraus die Coulombbarriere

$$V_C(r) = 2\alpha\hbar c\frac{Z-2}{r}$$

durchtunneln kann:



Der α-Zerfall ist eine Art Spezialfall der Kernspaltung.

Kernspaltung

S. P34ff.

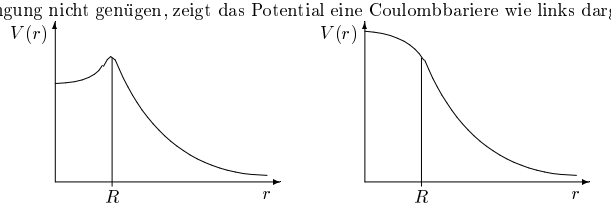
Aussage: Die *Bindungsenergie pro Nukleon* erreicht ein Maximum bei ^{56}Fe (mit $Z_{Fe} = 26$) und fällt zu schwereren Kernen hin wieder ab. Kerne mit $Z > 40$ können sich daher prinzipiell in zwei schwere Kerne aufspalten. **Spontane Spaltung** kommt dabei nur vor, wenn bei der Deformation des Kerns von einer Kugel zu einem Ellipsoid (mit anschließender Spaltung) Energie gewonnen werden kann, also

$$\Delta E \approx \Delta E_c - \Delta E_s > 0$$

wobei ΔE_c die Änderung der Coulomb-Energie und ΔE_s die Änderung der Oberflächen-Energie durch die Verformung darstellt. Dies ist der Fall für Kerne mit

$$\frac{Z^2}{A} > 48 \qquad \Rightarrow \qquad Z > 114 \quad \text{und} \quad A > 270$$

Für diese Kerne stellt sich das Potential wie im rechten Bild dar. Für die Kerne, die dieser Bedingung nicht genügen, zeigt das Potential eine Coulombbariere wie links dargestellt.



Bei der **induzierten Spaltung** führt man Kernen mit $Z \geq 92$ die notwendige Energie zur Überwindung der Coulombbarriere z.B. durch niederenergetische Neutronen zu. Beim Neutroneneinfang wird neben der Bindungs- auch Paarungs-Energie frei. Bei ^{235}U sind dies z.B. 6.4 MeV, was ausreicht, die Barriere von etwa 6 MeV zu überwinden.

Wellenlänge und Impuls von Projektil-Teilchen in der elastischen Streuung

S. P42f.

Aussage: Die Energie eines Projektil-Teilchen einer elastischen Streuung muß um so größer sein, je kleinere Strukturen man auflösen will. Die de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ eines Teilchens mit Impuls p

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} \approx \begin{cases} \hbar/\sqrt{2mE_{kin}} & \text{für } E_{kin} \ll mc^2 \\ \hbar c/E_{kin} & \text{für } E_{kin} \gg mc^2 \end{cases}$$

muß nämlich von der Größenordnung der aufzulösenden linearen Ausdehnung Δx sein, d.h. der Impuls muß von folgender Größenordnung sein:

$$pc \approx \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{\Delta x}$$

Definition: **Inklusive und exklusive Messung**

S. P43

Aussage: Bei der *inelastischen Streuung* mit Zerfall (der Stern deutet den angeregten Zustand von b an)

$$\text{a} + \text{b} \rightarrow \text{a'} + \text{b}^* \rightarrow \text{a'} + \text{c} + \text{d}$$

unterscheidet man zwischen

1. inklusiver Messung: Nachweis von a', nicht aber von c und d
2. exklusiver Messung: Nachweis von a', c und d

Definition: **Totaler Wirkungsquerschnitt**

S. P44ff.

Aussage: Der **geometrische Wirkungsquerschnitt** beschreibt die *effektive Querschnittsfläche der Targetteilchen* bei einem Streuexperiment. Die Reaktionswahrscheinlichkeit hängt jedoch oft von anderen Faktoren ab: der Energie der Projektilteilchen, Form und Reichweite der Wechselwirkung usw. Daher definiert man den **totalen Wirkungsquerschnitt** in Analogie zum geometrischen durch:

$$\sigma_{tot} := \frac{\dot{N}_{reak}}{\dot{N}_{pro}\, N_{tar}/A}$$

wobei $\dot{N}_{reak}$ die Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit, $\dot{N}_{pro}$ die Zahl der Projektilteilchen pro Zeiteinheit und N_{tar}/A die Zahl der Targetteilchen pro Fläche darstellt. Der totale Wirkungsquerschnitt teilt sich dabei auf in einen elastischen und einen inelastischen Reaktionsquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$$

Er hat die Dimension einer Fläche und wird meist in der Einheit barn angegeben:

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} m^2$$

Definition: **Luminosität**

S. P47

Aussage: Die Größe

$$\mathcal{L} = \Phi_{pro} \cdot N_{tar}$$

nennt man *Luminosität*, wobei Φ_{pro} den Fluß von Projektilteilchen und N_{tar} die Anzahl an Targetteilchen bezeichnet. Die Größe

$$\mathcal{L}_{int} := \int \mathcal{L}\, dt$$

bezeichnet man als *integrierte Luminosität*. Dann erhält man aus dem Produkt von integrierter Luminosität und Wirkungsquerschnitt direkt die Zahl der Reaktionen innerhalb eines Meßzeitraums:

$$N_{reak} = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{tot}$$

Definition: **Differentielle Wirkungsquerschnitt**

S. P47f.

Aussage: In der Praxis wird meist nicht der *totale Wirkungsquerschnitt* σ_{tot} registriert, sondern nur der Teil, der in einen bestimmten Raumwinkel

$$\Delta\Omega = \frac{A_{Det}}{r^2}$$

gestreut wird, wobei A_{Det} die vom Detektor abgedeckte Fläche des Raumwinkels in Richtung des Winkels θ bezeichne. Die dort nachgewiesene Reaktionsrate ist dann proportional zum *differentiellen Wirkungsquerschnitt* $\frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}$:

$$\dot{N}(E,\theta,\Omega) = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}\Delta\Omega$$

Anschaulich gibt der differentielle Wirkungsquerschnitt die Anzahl der Teilchen an, die in das Winkelelement $d\Omega$ um Ω gestreut werden, dividiert durch $d\Omega$ und die Zahl der Teilchen, die pro cm^2 einfallen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{ein}\, d\Omega}$$

Als *doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt* bezeichnet man

$$\frac{d^2\sigma(E,E',\theta)}{d\Omega dE'}$$

wobei E' die Energie der gestreuten Teilchen bezeichnet.

Fermis „Goldene Regel“

S. P48f./G215ff.

Aussage: Als *Fermis „Goldene Regel“* bezeichnet man folgende Formel für die Reaktionsrate

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \rho(E')$$

oder kurz:

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot (\text{Phasenraum})$$

wobei $\rho(E')$ die Energiedichte im Endzustand darstellt und $\mathcal{M}_{fi}$ das Übergangsmatrixelement (die Wahrscheinlichkeitsamplitude für der Übergang $i \to f$), welche sich wie folgt berechnet:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle\psi_f|\mathcal{H}_{int}|\psi_i\rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int}\psi_i \; dV$$

Goldene Regel für Zerfälle

S. G215

Aussage: Fermis *Goldene Regel* ergibt für einen *Zerfall*

$$1 \to 2 + 3 + \ldots + n$$

folgende Formel:

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \prod_{i=2}^{n} \frac{c\; d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3\; 2E_i} \cdot (2\pi)^4\; \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 \cdot - p_n)$$

Wirkungsquerschnitt mit Hilfe der Goldenen Regel

S. P49

Aussage: Der totale Wirkungsquerschnitt läßt sich mit Hilfe von Fermis goldener Regel

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \rho(E')$$

wegen

$$\Gamma_{if} = \frac{\dot{N}_{reak}(E)}{N_{pro}\; N_{tar}} = \frac{\sigma_{tot} \cdot v_{pro}}{V} \qquad \text{mit} \qquad V = \frac{N_{pro}}{n_{pro}}$$

wie folgt berechnen:

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{v_{pro}\hbar}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \cdot V$$

Vertizes und Propagator-Term in Feynman-Diagrammen

S. P51f.

Aussage: Bei *Feynman-Diagrammen* trägt jeder *Vertex* mit der Wurzel der jeweiligen Kopplungskonstante, z.B.

$$\sqrt{\alpha}$$

bei einem $e^+e^-\gamma$-Vertex, bei, weshalb das Übergangsmatrixelement bei Diagrammen erster Ordnung proportional zur jeweiligen Kopplungskonstante ist, z.B. (α_s = Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung)

$$\mathcal{M}_{fi} \propto \alpha_s.$$

Der *Propagator* trägt mit folgendem Term zum Übergangsmatrixelement bei

$$\frac{1}{Q^2 + M^2c^2}$$

wobei Q^2 das Quadrat des Vierimpulses des Austauschteilchens („Impulsübertrag“) und M seine Masse darstellt.

Invariante Masse und relativistische Energie-Impuls-Beziehung

S. P53f.

Aussage: Orts- und Impuls-Vierervektor sind in der speziellen Relativitätstheorie wie folgt definiert:

$$x := (ct, \vec{x}) \qquad \text{und} \qquad p := (E/c, \vec{p})$$

Für das Quadrat des Viererimpulses folgt dann

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2, \qquad (\star)$$

da sich immer ein Bezugssystem finden läßt, in dem das Teilchen ruht (d.h. $\vec{p} = 0$ und $E = mc^2$). Die so gewonnene Masse, nennt man *invariante Masse*:

$$m = \frac{\sqrt{p^2}}{c}$$

Multiplikation von $(\star)$ mit c^2 ergibt die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4$$

mit

$$E \approx |\vec{p}|c \qquad \text{für} \quad E \gg mc^2$$

Energie eines elastisch gestreuten Elektrons im Laborsystem

S. P54f.

Aussage: Für die Energie E' eines elastisch gestreuten Elektrons ergibt sich mit Hilfe der Vierer-Impulserhaltung im Falle großer Energie E des Elektrons vor dem Streuvorgang die folgende Formel:

$$E' = \frac{E}{1 + R(E) \cdot (1 - \cos\theta)} \qquad \text{mit} \qquad R(E) := \frac{E}{Mc^2}$$

wobei θ den Streuwinkel bezeichnet und $R(E)$ das Verhältnis von Energie des Elektrons und Ruheenergie des Stoßpartners mit Ruhemasse M.

Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt

S. 55ff.

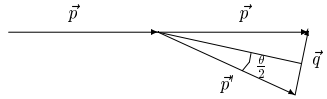
Aussage: Betrachten wir die Streuung eines Elektrons der Energie E an einem Atomkern der Ladung Ze. Im Falle der *Rutherfordschen Streuformel* wird

1. der Rückstoß des Kerns
   $\Rightarrow E' = E$ und $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$
2. der Spin von Elektron und Kern

vernachlässigt und man erhält:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{(Ze^2)^2 \cdot 4E^2}{|\vec{q}c|^4}$$

Mit Hilfe von $|\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}| \sin\frac{\theta}{2}$ und $E = |\vec{p}| \cdot c$



ergibt sich daraus

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{(Ze^2)^2}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Man beachte die $\frac{1}{|\vec{q}|^4}$- bzw. $\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes! Dies ist einsichtig, wenn man sich vor Augen führt, daß der Propagatorterm für das masselose Photon

$$\frac{1}{Q^2 + M^2c^2} = \frac{1}{Q^2}$$

quadratisch in den Wirkungsquerschnitt eingeht.

Bornsche Näherung

S. P56

Aussage: In der *Bornschen Näherung* kann man bei der elastischen Streuung von Elektronen an Kernen die ein- und auslaufenden Elektronen durch *ebene Wellen* beschreiben (V = endliches Volumen):

$$\psi_{ein} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \qquad \text{und} \qquad \psi_{aus} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}'\cdot\vec{x}}$$

Die Bornsche Näherung gilt unter zwei Bedingungen:

1. schweres Target: Rückstoß vernachlässigbar
   $\Rightarrow$ man kann mit *Dreierimpulsen* rechnen
2. Kernladung Ze klein, d.h. $Z\alpha \ll 1$

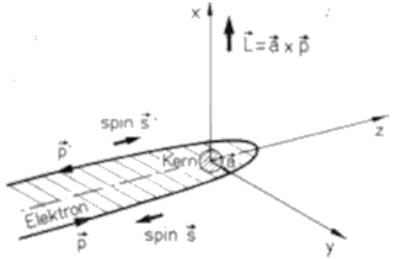
Definition: **Helizität**

S. P61/P137

Aussage: Die *Helizität*, welche *im relativistischen Grenzfall* eine Erhaltungsgröße ist, definiert man wie folgt:

$$h := \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{p}|}$$

d.h. Teilchen mit Spin *in* Bewegungsrichtung haben Spin $+1$, Teilchen mit Spin *entgegen* der Bewegungsrichtung Spin -1.



Im *nichtrelativistischen Fall*, d.h. $v < c$, ist die Helizität keine Erhaltungsgröße mehr, da man dann immer ein Bezugssystem finden kann, indem das Teilchen überholt wird und sich die Helizität umkehrt.

Mott-Wirkungsquerschnitt

S. P60

Aussage: Der *Mott-Wirkungsquerschnitt* ergibt sich aus dem Rutherford-Wirkungquerschnitt unter Berücksichtigung der Spineffekte (der Stern zeigt an, daß der Rückstoß des Kerns vernachlässigt wird):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{mit} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Im *relativistischen Grenzfall* $\beta \to 1$ wird der Mott-Wirkungsquerschnitt sehr einfach:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Dies wird anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß die Helizität im relativistischen Fall erhalten ist und daher bei einer Streuung um 180° die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung des einlaufenden Elektrons sich ebenfalls um 180° ändert und somit der Gesamtdrehimpuls, was aber nicht möglich ist, wenn das Target keinen Spin besitzt.

Definition: **Formfaktoren**

S. P61ff.

Aussage: Mißt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt in der Streuung von Elektronen an Atomkernen, so ergibt sich eine Abweichung vom Mott-Wirkungsquerschnitt. Diese Abweichung bezeichnet man als das *Betragsquadrat des Formfaktors*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

dabei hängt der Formfaktor F nur vom Betrag des Impulsübertrags $\vec{q}$ ab, weshalb man $F(\vec{q}^2)$ schreibt. Er

1. beschreibt die *räumliche Ausdehnung des Kerns*
2. stellt die *Fouriertransformierte der Ladungsverteilung* $f(\vec{x})$ dar:

$$F(\vec{q}^2) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x}}\, f(\vec{x})\, d^3x$$

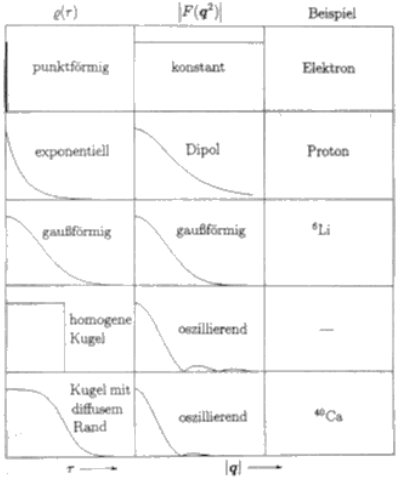
Der zweite Punkt gilt nur im Falle Bornscher Näherung und vernachlässigbarem Rückstoß. Bei Kugelsymmetrie erhält man durch Rücktransformation für die *radiale Ladungsverteilung*

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int F(\vec{q}^2)\; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x}}\; d^3q$$

Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor

S. P65

Aussage: In Bornscher Näherung ist der Formfaktor $F(\vec{q}^2)$ die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung $\rho(r)$:



Bestimmung des Atomradius

S. P64ff.

Aussage: Es gibt zwei Möglichkeiten den Atomradius zu bestimmen:

1. aus dem ersten Minimum des Formfaktors
   → v.a. wenn die Ladungsverteilung eine Kugel mit diffusem Rand darstellt

2. aus der Steigung des Formfaktors bei $\vec{q}^2 = 0$
   → $F(\vec{q}^2)$ läßt sich nach Potenzen von $|\vec{q}|$ entwickeln, wenn gilt:

$$\frac{|\vec{q}| \cdot R}{\hbar} \ll 1$$

dann ergibt sich der *mittlere quadratische Ladungsradius*

$$\left\langle r^2 \right\rangle := 4\pi \int_0^\infty r^2 \cdot \rho(r) r^2 \, dr$$

($\rho(r)$ ist die radiale Ladungsverteilung des Kerns) aus den ersten beiden Gliedern der Entwicklung zu

$$\left\langle r^2 \right\rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(\vec{q}^2)}{d\vec{q}^2} \right|_{\vec{q}^2=0}$$

Beschreibt man den Kern näherungsweise als Kugel mit Radius R, so ergibt sich:

$$R^2 = \frac{5}{3} \left\langle r^2 \right\rangle$$

Radiale Ladungsverteilung in Atomkernen

S. P67f.

Aussage: Die *radiale Ladungsverteilung* in Atomkernen läßt sich in guter Näherung durch eine *Fermi-Verteilung mit zwei Parametern* beschreiben:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

wobei c den Radius darstellt, bei dem $\rho(r)$ auf die Hälfte abgesunken ist. Empirisch mißt man für größere Kerne:

$$c = 1.07 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}} \qquad \text{und} \qquad a = 0.54\text{fm}$$

Definition: **Hautdicke von Atomkernen**

S. P68

Aussage: Als *Hautdicke von Kernen* bezeichnet man die Dicke der Schicht in der Ladungsverteilung bei der die Ladungsdichte von 90% auf 10% absinkt. Sie ist für alle schwereren Kerne etwa gleich groß:

$$t = 2a \cdot \ln 9 = 2.4 \text{ fm}$$

Magnetisches Moment eines Dirac-Teilchens

S. P72

Aussage: Ein *Dirac-Teilchen* (Spin-1/2-Teilchen) besitzt ein *magnetisches Moment*

$$\mu = \frac{g}{2} \mu_B \approx \mu_B$$

welches in etwa dem Bohrschensch Magneton

$$\mu_B := \frac{e}{m} \frac{\hbar}{2}$$

entspricht, da der Landé-Faktor g ungefähr gleich 2 ist.

Magnetisches Moment eines Nukleons

S. P72f./P204f.

Aussage: Ein *Nukleon* besteht aus Quarks besitzt ein *magnetisches Moment* von

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{g_p}{2} \mu_N = +2.79 \cdot \mu_N \\ \mu_n &= \frac{g_n}{2} \mu_N = -1.91 \cdot \mu_N \end{aligned}$$

für Proton und Neutron, wobei

$$\mu_N := \frac{e}{M_p} \frac{\hbar}{2}$$

das *Kernmagneton* darstellt. Besäßen Proton und Neutron keine Substruktur, so sollte ihr magnetisches Moment gleich dem Wert des Kernmagnetons sein. Daher stellen μ_p und μ_n einen Hinweis dar, daß Proton und Neutron keine Elementarteilchen sind und man spricht vom *anomalen* magnetischen Moment des Protons und Neutrons.

Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung eines Elektrons an einem Nukleon

S. P71ff.

Aussage: Der *Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Nukleon* läßt sich mit Hilfe der *Rosenbluth-Formel*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau\ G_M^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau\ G_M^2(Q^2)\ \tan^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\text{mit} \quad \tau := \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

berechnen, wobei sich der Mott-Querschnitt mit Rückstoß aus dem ohne Rückstoß (mit Stern) wie folgt ergibt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \cdot \frac{E'}{E}$$

(E': Energie des Elektrons nach der Streuung, E: Energie des Elektrons vor der Streuung). Die *elektrischen und magnetischen Formfaktoren* $G_E^2(Q^2)$ und $G_M^2(Q^2)$ hängen vom *Quadrat des Impulsübertrags* Q^2 ab, einer lorentz-invarianten Größe.
Im wichtigen Grenzfall $Q^2 \to 0$ werden sie gleich der elektrischen Ladung e bzw. dem auf das Kernmagneton normierten magnetischen Moment des Targets:

$$G_E^p(Q^2=0) = 1 \quad \text{und} \quad G_E^n(Q^2=0) = 0$$
$$G_M^p(Q^2=0) = 2.79 \quad \text{und} \quad G_M^n(Q^2=0) = -1.91$$

Ladungsverteilung im Nukleon

S. P74f.

Aussage: Die Formfaktoren des Nukleons, die man aus elastischer Streuung mit Elektronen erhält, werden in guter Näherung durch einen *Dipolfit* beschrieben:

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91} = G^{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV/c})^2}\right)^{\mathbf{-2}}$$

Inverse Fouriertransformation ergibt dann für das Nukleon eine *exponentiell abfallende Ladungverteilung*

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \qquad \text{mit} \qquad a = 4.27\ \text{fm}^{-1}$$

Für den *mittleren quadratischen Ladungsradius*

$$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2\ \frac{dG^{\text{Dipol}}(Q^2)}{dQ^2}\bigg|_{Q^2=0}$$

ergibt sich daraus

$$\sqrt{\langle r^2\rangle_p} = 0.862\ \text{fm} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\langle r^2\rangle_n} = 0.10 \pm 0.01\ \text{fm}$$

***Definition:* Quasielastische Streuung**

S. P77

Aussage: Als *quasielastische Streuung* bezeichnet man die Streuung von Elektronen an einzelnen Nukleonen eines Atomkerns. In der sogenannten *Stoßnäherung* (*impulse approximation*) geht man von der Wechselwirkung mit nur *einem* Nukleon aus, das als „quasifrei" betrachtet werden kann, d.h. die Wechselwirkung mit anderen Nukleonen vernachlässigbar ist.

Ladungsverteilung in Pionen und Kaonen

S. P79f.

Aussage: Die Formfaktoren von Pionen und Kaonen, die man aus elastischer Streuung mit Elektronen erhält, werden in guter Näherung durch einen *Monopolfit* beschrieben:

$$G_E(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{(a\hbar)^2}\right)^{\mathbf{-1}} \qquad \text{mit} \qquad a^2 := \frac{6}{\langle r^2\rangle}$$

Für den *mittleren quadratischen Ladungsradius*

$$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2\ \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2}\bigg|_{Q^2=0}$$

ergibt sich daraus

$$\sqrt{\langle r^2\rangle_\pi} = 0.67\ \text{fm} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\langle r^2\rangle_K} = 0.58\ \text{fm}$$

Parameter bei der elastischen und inelastischen Streuung an Nukleonen

S. P81ff.

Aussage: Streut man Elektronen mit einer Energie von einigen GeV an Nukleonen, so zeigen sich *Resonanzen* im differentiellen Wirkungsquerschnitt, die von *angeregten Nukleonzuständen* herrühren. Die deutlichste ist dabei die Δ-Resonanz bei einer invarianten Masse von $W = 1232\ \mathrm{MeV}/c^2$. Für die invariante Masse ergibt sich aus dem Viererimpuls des angeregten Protons P' mit Hilfe von Impulserhaltung:

$$W^2c^2 = P'^2 = M^2c^2 + 2M\nu - Q^2$$

wobei die lorentz-invariante Größe ν im Laborsystem dem „Energieübertrag“ entspricht:

$$\nu := \frac{Pq}{M} \overset{\text{Laborsysstem}}{=} E - E'$$

Man unterscheidet nun:

1. elastische Streuung: $W = M$
   → bei vorgegebener Energie E ist *ein* Parameter nötig, da
   $$2M\nu - Q^2 = 0$$
2. inelastische Streuung: $W > M$
   → bei vorgegebener Energie E sind *zwei* Parameter nötig, da
   $$2M\nu - Q^2 > 0$$

In der *tiefinelastischen Streuung* ist die Energie so hoch, daß man die Bestandteile des Nukleons, die Quarks untersucht.

***Definition:* Bjorkensche Skalenvariable**

S. P84

Aussage: Als *Bjorkensche Skalenvariable* bezeichnet man die folgende Größe

$$x := \frac{Q^2}{2M\nu} \qquad \text{mit} \qquad \nu := \frac{Pq}{M}$$

Sie ist ein *Maß für die Inelastizität* eines Streuprozesses am Nukleon:

1. bei elastischer Streuung ($W = M$) ist
   $$2M\nu - Q^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 1$$
2. bei inelastische Streuung ($W > M$) ist
   $$2M\nu - Q^2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad 0 < x < 1$$

Das Partonmodell

S. P86f.

Aussage: Das *Partonmodell*, in dem man die Konstituenten des Protons als *Partonen* bezeichnet, gilt nur, wenn drei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Stoßnäherung: Streuung nur an einem Nukleon
   → Wechselwirkung mit anderen Nukleonen vernachlässigbar
2. Partonruhemassen vernachlässigbar: in schnell bewegtem System erfüllt
3. Q^2 groß: $Q^2 \gg M^2c^2$

Dann hat die *Bjorkensche Skalenvariable* eine anschauliche Bedeutung: sie gibt den *Bruchteil des Viererimpulses* des Protons an, der vom Parton getragen wird.
Man führt nun zwei Strukturfunktionen $F_1(x, Q^2)$ und $F_2(x, Q^2)$ ein, für die man folgende Eigenschaften findet:

- $F_1(x, Q^2)$ und $F_2(x, Q^2)$ hängen sehr schwach von Q^2 ab
  ⇒ die Partonen sind *punktförmig* (Fouriertransformierte von $F =$ konst.)
- *Callan-Gross-Beziehung:* $2x \cdot F_1(x) = F_2(x)$
  ⇒ Partonen haben Spin $\frac{1}{2}$

Die Strukturfunktion $F_2(x)$, welche von der elektrischen Wechselwirkung abhängt, ergibt sich zu

$$F_2(x) = x \cdot \sum_f z_f^2 \Big(q_f(x) + \bar{q}_f(x) \Big)$$

wobei q_f den Impuls des Quarks der Sorte f, $\bar{q}_f$ den Impuls des Anti-Quarks der Sorte f und z_f die Ladung des (Anti-)Quarks der Sorte f bezeichnet.
Als *Strukturfunktion F_2^N des Nukleons* bezeichnet man die Strukturfunktion F_2^D des Deuterons:

$$F_2^D \approx \frac{F_2^p + F_2^n}{2} =: F_2^N$$

Breit-System

S. P88f.

Aussage: In der tiefinelastischen Streuung benutzt man manchmal das sogenannte *Breit-System*, indem das Photon keine Energie überträgt. Dann ergibt sich die reduzierte Wellenlänge des Photons recht einfach durch:

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{|\vec{q}^2|} = \frac{\hbar}{\sqrt{Q^2}}$$

d.h. im Breit-System erfährt Q^2 daher eine anschauliche Deutung: Es ist ein Maß für die räumliche Auflösung, mit der Strukturen untersucht werden können (das Auflösungsvermögen entspricht ja gerade der Wellenlänge des Projektilteilchens).

Definition: **Valenz- und Seequarks**

S. P89f./P144

Aussage: Ein Nukleon besteht aus Quarks. Diese setzen sich aus zwei Arten zusammen:

1. Valenzquarks: sind für die Quantenzahlen des Nukleons verantwortlich
2. Seequarks: Quark-Antiquark-Paare, die im Feld der starken Wechselwirkung aus den Gluonen *virtuell* erzeugt werden und wieder annihilieren.

Seequarks tragen nur für $0 \leq x \leq 0.25$ zur Strukturfunktion $F_2^N(x)$ des Nukleons bei, Valenzquarks v.a. im Bereich $0.1 \leq x \leq 0.6$, im Durchschnitt tragen sie einen Anteil von

$$\langle x_V \rangle \approx 0.12 \qquad \text{bzw.} \qquad \langle x_S \rangle \approx 0.04$$

des Gesamtimpulses, die Gluonen tragen ungefähr die Hälfte.

EMC-Effekt

S. P91

Aussage: Die typische Energieskala der Kernphysik liegt bei einigen MeV. Zur Bestimmung der Strukturfunktionen des Nukleons verwendet man Energien von einigen GeV. Es sollte sich daher kein Unterschied in den Strukturfunktionen ergeben, ob man freie oder im Kern gebundene Nukleonen untersucht. Tatsächlich wurde jedoch im Jahre 1983 von der EMC-Kollaboration eine Abweichung festgestellt, die bis heute nicht völlig verstanden ist. Man bezeichnet sie als *EMC-Effekt*.

Komponenten von Proton und Neutron

S. P93

Aussage: Das Proton und das Neutron sind aus u und d Quarks aufgebaut, welche folgende Eigenschaften besitzen:

	u	d	p (uud)	n (udd)
Ladung z	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0
Isospin I	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Spin s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Flavour

S. P94

Aussage: Man bezeichnet die Quarktypen als „*Flavours*“ (engl. „Geschmack“). Man ordnet sie in drei *Dubletts*, die man *Familien* oder *Generationen* nennt:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Strom- und Konstituentenquarks

S. P79/P119

Aussage: Bei der Behandlung von Quarks gibt es zwei Möglichkeiten:

1. man behandelt Gluonen und Seequarks nicht explizit und tut so, als gäbe es nur Valenzquarks, zwar mit erhöhter Masse, aber unveränderten Quantenzahlen. Diese „effektiven Valenzquarks“ nennt man dann *Konstituentenquarks*
   → in der Spektroskopie „beobachtbar“
2. man betrachtet die Valenzquarks getrennt und nennt sie *Stromquarks* (engl. *current quarks*)
   → in der tiefinelastischen Streuung „beobachtbar“

Die Massen von Strom- und Konstituenten-Quarks sind in folgender Tabelle aufgeführt:

Quark	**elektr. Ladung**	**Masse [MeV/c²]** **Stromquark**	**Konst.-Quark**
down	$-\frac{1}{3}$	5-15	≈ 300
up	$+\frac{2}{3}$	2-8	≈ 300
strange	$-\frac{1}{3}$	100-300	≈ 450
charm	$+\frac{2}{3}$	1 - 1.6 GeV/c^2	
bottom	$-\frac{1}{3}$	4.1 - 4.5 GeV/c^2	
top	$+\frac{2}{3}$	168 - 192 GeV/c^2	

Baryonenzahl

S. P98

Aussage: Die *Baryonenzahl* B ist in allen Teilchenreaktionen eine *Erhaltungsgröße*. Sie beträgt

- $+\frac{1}{3}$ für alle Quarks
- $-\frac{1}{3}$ für alle Anti-Quarks
- $+1$ für alle Baryonen
- -1 für alle Anti-Baryonen
- 0 für alle Mesonen

Aus den Baryonenzahlen der (Anti-)Quarks erklären sich die Baryonenzahlen von (Anti-) Baryonen und Mesonen.

Baryonen und Mesonen

S. P98f.

Aussage: *Hadronen* sind aus Quarks zusammengesetzt. Man teilt sie in zwei Klassen auf:

1. Baryonen: aus 3 Quarks zusammengesetzt (gr. $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ - schwer)

2. Mesonen: aus 2 Quarks zusammengesetzt (gr. $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\circ\varsigma$ - mittel, in der Mitte)

Eigenschaften und Zusammensetzung beider Hadronenarten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	Baryonen	**Mesonen**
Zusammensetzung	qqq	$q\bar{q}$
Spin	halbzahlig	ganzzahlig
Baryonzahl	1	0
Beispiele	n, p, Δ	π, φ, K

Pionen

S. P99

Aussage: *Pionen* sind Mesonen. Sie sind aus u- und d-Quarks zusammengesetzt:

$$|\pi^+\rangle := |u\bar{d}\rangle\,, \qquad |\pi^-\rangle := |\bar{u}d\rangle\,, \qquad |\pi^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle\,\Big)$$

Pionen haben daher Spin Null (u und d haben jeweils Spin $\frac{1}{2}$).

Das Farbkonzept

S. P99ff./P119ff.

Aussage: Das Konzept der *Farbe* ist eine Eigenschaft von Quarks:

1. Motivation: es wird benötigt, um das Pauli-Prinzip bei Quarks und Hadronen zu gewährleisten

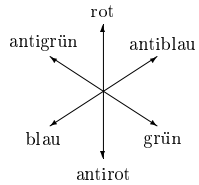
   → das $|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$ ist das leichteste Baryon mit $J^P = 3/2^+ \Rightarrow l = 0 \Rightarrow$ Ortswellenfunktion symmetrisch, Spinwellenfunktion wegen $|u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$ ebenfalls symmetrisch

   → wären alle u-Quarks im Δ^{++} gleich, so wäre die Gesamtwellenfunktion auch symmetrisch gegenüber der Vertauschung zweier Quarks, daher muß man die Quarks unterscheiden können: sie tragen Farbe

2. Konzept: Hadronen sind immer farbneutral, d.h.

   - Hadronen bestehen aus Quarks mit drei Farben, die zusammen weiß ergeben
   - Mesonen bestehen aus Quark und Antiquark mit Farbe und Antifarbe, die zusammen weiß ergeben

   Den Farbraum kann man sich folgendermaßen vorstellen:



3. Experimentelle Bestätigung: Bestimmt man in der e^+e^--Streuung das Verhältnis

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

   so ist die Ladung der Quarks nicht e wie bei den Myonen, sondern drittelzahlig, also $z_f \cdot e$ (f steht für den Flavour) und außerdem gibt es Quarks mit drei verschiedenen Farben. Man erwartet also

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3 \cdot \sum_f z_f^2$$

   Dieses Verhältnis stimmt sehr gut mit den Meßwerten überein, was eine eindrucksvolle Bestätigung dafür ist, daß es genau drei Farben gibt

Gluonen

S. P100f.

Aussage: *Gluonen* sind die Austauschteilchen der *starken Wechselwirkung*. Sie haben folgende Eigenschaften:

1. sie besitzen Masse
2. sie sind *Vektorbosonen*, haben also $J^P = 1^-$
3. sie koppeln an die Farbladung
4. sie tragen Farbe und Antifarbe
5. aus den 3×3 Farbkombinationen ergibt sich
   (a) ein Oktett: z.B.
   $$r\bar{g}, \quad r\bar{b}, \quad g\bar{b}, \quad g\bar{r}, \quad b\bar{r}, \quad b\bar{g}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \quad \sqrt{\frac{1}{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$
   (b) ein Singulett: z.B.
   $$\sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$
   das Singulett ist symmetrisch gegen Farbumdefinition und farbneutral

Die Wechselwirkung findet daher mit den 8 farbigen Gluonen statt

Confinement

S. P101

Aussage: Da in der Natur nur farbneutrale Teilchen vorkommen, ist es nicht möglich, Quarks aus Hadronen herauszulösen und sie als freie Teilchen zu betrachten. Das Potential einem Hadron muß daher mit sich vergrößerndem Abstand zu beliebig großen Werten anwachsen. Dieses Phänomen nennt man *Confinement* (engl. *to confine* = einsperren). Es beruht auf der Wechselwirkung der Gluonen untereinander.

Die starke Kopplungskontante

S. P103

Aussage: Die *starke Kopplungskontante* α_s ist eigentlich keine Konstante, sondern hängt sehr stark vom Impulsübertrag Q^2 ab (auch die elektromagnetische Kopplungskonstante α ist von Q^2 abhängig, jedoch nur schwach). Dies beruht auf der Wechselwirkung der Gluonen untereinander. In erster Ordnung Störungsrechnung (d.h. für $\alpha_s \ll 1$) erhält man

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

Der Parameter Λ ist der einzige freie Parameter der QCD und bestimmt sich experimentell zu

$$\Lambda \approx 250 \text{ MeV/c}$$

Für $Q^2 \to \infty$ wird die Kopplung Null, man spricht von *asymptotischer Freiheit*.

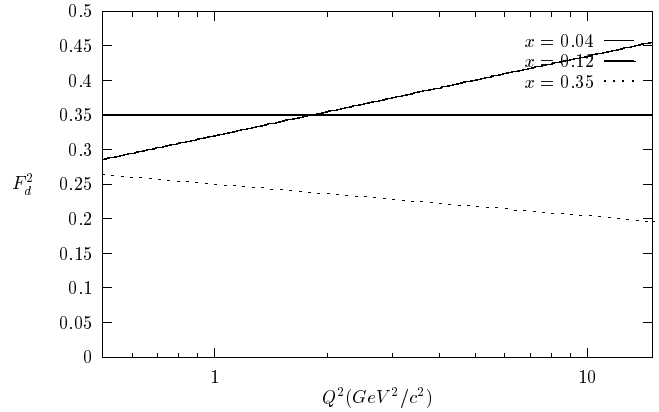
Skalenbrechung

S. P103ff.

Aussage: Präzisionsmessungen haben ergeben, daß die Strukturfunktion F_2 nicht allein von x, sondern auch in geringem Maße von Q^2 abhängt:

- bei kleinem x steigt F_2 mit Q^2 an
- bei großem x fällt F_2 mit Q^2 ab

In der folgenden Abbildung sind Messungen am Deuteron schematisch dargestellt.



Dies kommt daher, daß die Bausteine des Nukleons ständig wechselwirken: Quarks strahlen Gluonen ab, Gluonen spalten sich in $q\bar{q}$-Paare auf oder Strahlen Gluonen ab usw. Da die Auflösung $\hbar/\sqrt{Q^2}$ beträgt (Breit-System) kann man

- bei kleinem Q^2 Quarks und möglicherweise abgestrahlte Gluonen nicht getrennt werden ⇒ es gibt mehr aufgelöste Partonen mit großem x
- bei großem Q^2 wächst die Anzahl der *aufgelösten* Partonen an, die sich den Impuls des Nukleons teilen ⇒ es gibt mehr aufgelöste Partonen mit kleinem x

Man kann daher von einer Art *Selbstähnlichkeit* der inneren Struktur stark wechselwirkender Teilchen sprechen: Mit zunehmender Auflösung erkennt man neue Partonen.

Vergleich Collider - Fixed-Target-Experiment

S. P110

Aussage: Die Variable s bezeichnet das Quadrat der Schwerpunktsenergie:

$$s := E_{cm}^2 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2c^2$$

In einem *Collider*, bei dem Teilchenstrahlen mit der Energie E_{Strahl} an einem Wechselwirkungspunkt aufeinandertreffen, gilt daher

$$E_{cm} = \sqrt{s} = 2\,E_{\text{Strahl}}$$

d.h. die Schwerpunktsenergie wächst *linear* mit der Strahlenergie. Bei einem *Fixed-Target-Experiment*, dessen ruhendes Target die Masse m mit $mc^2 \ll E_{\text{Strahl}}$ besitzt, hingegen wächst die Schwerpunktsenergie nur mit der *Wurzel* der Strahlenergie:

$$E_{cm} = \sqrt{s} = \sqrt{2mc^2 \cdot E_{\text{Strahl}}}$$

In Speicherringen erreicht man daher größere Schwerpunktsenergien.

Wirkungsquerschnitt für Myonpaarerzeugung in e^+e^--Collidern

S. P113

Aussage: Der Wirkungsquerschnitt von Reaktionen in e^+e^--*Collidern* wird gewöhnlich auf den Wirkungsquerschnitt für Myonpaarerzeugung normiert. Dieser ergibt sich recht einfach durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}\,(\hbar c)^2 \cdot (1+\cos^2\theta)$$

wobei $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie bezeichnet. Der Propagator (das Photon) koppelt zweimal an die Elementarladung e, d.h. $\mathcal{M}_{if} \sim e^2 \Rightarrow \sigma \sim e^4 \sim \alpha^2$. Die Winkelabhängigkeit $(1+\cos^2\theta)$ ist typisch für die Erzeugung zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen.
Die Formel ist analog zum Mott-Wirkungsquerschnitt mit $Q^2c^2 = s = 4E^2$.

Leptonuniversalität

S. P114

Aussage: Mit *Leptonuniversalität* bezeichnet man das Phänomen, daß sich Elektron, Myon und Tauon, abgesehen von Masseneffekten, in allen Reaktionen gleich verhalten.

Breit-Wigner-Formel

S. P115

Aussage: Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die Reaktion zweier Teilchen a und b in der Nähe einer *Resonanz* bei E_0 wird durch die *Breit-Wigner-Formel* beschrieben. Im Falle elastischer Streuung gilt näherungsweise

$$\sigma(E) = \frac{\pi\lambda^2\,(2J+1)}{(2s_a+1)\,(2s_b+1)} \cdot \frac{\Gamma^2}{(E-E_o)^2+\Gamma^2/4}$$

wobei Γ die *Halbwertsbreite* der Resonanz, s_a und s_b die Spins der beiden Teilchen und λ die reduzierte Wellenlänge im Schwerpunktsystem bezeichet.
Die Formel erinnert an eine *erzwungene Schwingung mit großer Dämpfung*, d.h. $E \mathrel{\hat{=}} \omega$ und Γ entspricht der Dämpfung.
Für die Partialbreiten Γ_i und Γ_f im Eingangs- und Ausgangskanal ergibt sich für zwei Elektronen (Spin $\frac{1}{2}$, Photonpropagator $J=1$):

$$\sigma_f(E) = \frac{3\pi\lambda^2}{4} \cdot \frac{\Gamma_i\Gamma_f}{(E-E_o)^2+\Gamma_{tot}^2/4}$$

wobei die *totale Breite* Γ_{tot} die Summe der Partialbreiten ist. Bei den verschiedenen Zerfallskanälen bestimmt die jeweilige *Partialbreite* die *Höhe* des Resonanzpeaks und die *totale Breite* dessen *Breite*!

Hadronisierung

S. P119

Aussage: Unter *Hadronisierung* versteht man die Anlagerung von Quark-Antiquark-Paaren an ein primär erzeugtes Quark-Antiquark-Paar. Bei hohen Energien entstehen *Jets*, d.h. Bündel von Hadronen, die in eine bestimmte Richtung zeigen.

Gluonabstrahlung in e^+e^--Kollisionen

S. P121f.

Aussage: In e^+e^--Kollisionen kommen bei Schwerpunktsenergien unterhalb von $\sqrt{s} = 2m_Wc^2 = 161$ GeV vor allem *Zwei-Jet-Ereignisse* vor, d.h. der Prozeß

$$e^+e^- \to Z^0/\gamma \to q\bar{q}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesem Prozeß zusätzlich ein Gluon abgestrahlt wird, ist durch die Kopplungskonstante α_s gegeben. Bei der *Gluonabstrahlung* beobachtet man dann drei Jets, man spricht von *Drei-Jet-Ereignissen*. Durch Messung des Verhältnisses der Anzahl an Zwei-Jet- und Drei-Jet-Ereignissen kann man daher α_s bestimmen.

Hadron-Erzeugung in der e^+e^--Vernichtung

S. P116ff.

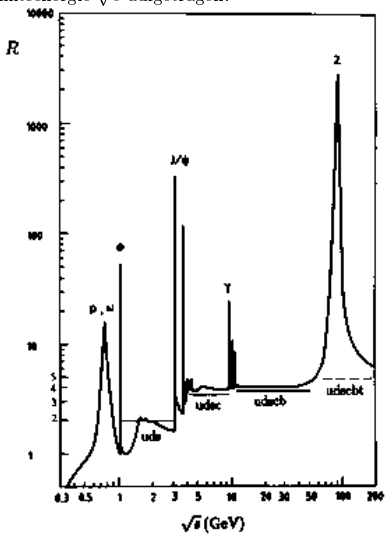
Aussage: Erhöht man schrittweise die Schwerpunktsenergie in einem e^+e^--*Collider* so treten im Kanal

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

verschiedene Resonanzen auf, die Quark-Antiquark-Zustände darstellen und diesselben Quantenzahlen wie das Propagatorphoton besitzen müssen, insbesondere $J^P = 1^-$. Man nennt sie daher *Vektormesonen*. Beispiele sind das $\rho, \omega, \varphi, J/\psi$ oder das Υ. Bei $\sqrt{s} = 91.2$ GeV findet man das Z^0, das neutrale Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung. In der folgenden Abbildung ist das Verhältnis

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

gegen die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ aufgetragen:



Im Bereich zwischen den Resonanzen findet *Hadronisierung* statt. Da nur diejenigen Quarks beteiligt sein können deren Masse kleiner ist als die halbe zur Verfügung stehende Schwerpunktsenergie, d.h.

$$m_q \leq \frac{sqrts}{2},$$

zeigt das Bild Stufen in R.

Leptonzahl

S. P125f.

Aussage: Leptonen teilen sich in drei Familien auf

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

Je der Familien besitzt dabei eine *Leptonfamilienzahl* L_l, die bei Reaktionen immer erhalten bleibt, d.h.

$$L_l := N(l) - N(\bar{l}) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l) = \text{konstant.} \qquad \text{mit} \qquad l = e, \mu, \tau$$

Die Summe der Leptonfamilienzahlen heißt *Leptonzahl* und ist natürlich auch erhalten:

$$L := L_e + L_\mu + L_\tau = \text{konstant}$$

Der geladene Strom der schwachen Wechselwirkung

S. P126ff.

Aussage: Der *geladene Strom* bei der schwachen Wechselwirkung wird durch das W^+ oder das W^- vermittelt. Er teilt sich in drei Typen von Reaktionen ein:

1. leptonischer Prozeß: $l + \bar{\nu}_l \rightarrow W^- \rightarrow l'\bar{\nu}_{l'}$
2. semileptonischer Prozeß: $q_1 + \bar{q}_2 \rightarrow W^- \rightarrow l\bar{\nu}_l$
3. hadronischer Prozeß: $q_1 + \bar{q}_2 \rightarrow W^\pm \rightarrow q_3\bar{q}_4$

(sowie die ladungskonjugierten Prozesse mit W^+)
Beispiele:

- Tauzerfall:

$$\tau^- \rightarrow W^- + \nu_\tau \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \qquad \text{und} \qquad \tau^- \rightarrow W^- + \nu_\tau \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$$

- Umwandlung eines Quarks in seinen Familienpartner:

$$d \rightarrow u + W^- \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \text{und} \qquad d \rightarrow u + W^- \rightarrow u + \bar{u} + d$$

Das Übergangsmatrixelement bei geladenem Strom ergibt sich aufgrund der großen Masse $m_W \approx 80$ GeV$/c^2$ des W-Bosons bei nicht allzu großen Impulsüberträgen $Q^2 \ll m_W c^2$ zu ($W^\pm$ = Spin-1-Teilchen)

$$\mathcal{M}_{fi} \propto g \cdot \frac{1}{Q^2c^2 + m_W^2c^4} \cdot g \overset{Q^2 \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{g^2}{m_w^2c^4}$$

Die Reichweite der Wechselwirkung ist wegen der großen W-Masse gering:

$$\frac{\hbar}{m_w c} \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

Fermi-Konstante

S. P129f.

Aussage: Die Reichweite der schwachen Wechselwirkung ist wegen der großen W-Masse (bzw. Z-Masse) gering:

$$\frac{\hbar}{m_w c} \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

Daher läßt sich die Wechselwirkung für kleine Impulsüberträge als *Punktwechselwirkung* von vier Teilchen beschreiben, deren Kopplungsstärke durch die *Fermi-Konstante* G_F gegeben ist, die in Analogie zur elektromagnetischen Kopplungskonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

wie folgt definiert wird:

$$G_F := \frac{g^2}{m_w^2 c^4} \frac{(\hbar c)^2}{\sqrt{32}\epsilon_0}$$

Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix

S. 133ff.

Aussage: Das $W^\pm$ kann ein Quark in seinen Familienpartner

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

umwandeln, z.B. $d \to u + W^-$. Zu einem geringen Maße ist auch eine Umwandlung in einen Quark einer *anderen* Familie möglich, d.h. der Partner von $|u\rangle$ ist nicht $|d\rangle$, sondern eine Linearkombination aus $|s\rangle$ und $|d\rangle$, die wir $|d'\rangle$ nennen usw. Man schreibt diese Linearkombinationen mit Hilfe eines *Cabbibo-Winkels* θ_C:

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$$

Experimentell kann man θ_C bestimmen. Es ergibt sich

$$\sin\theta_C \approx 0.22 \qquad \text{und} \qquad \cos\theta_C \approx 0.98$$

Nimmt man die dritte Generation hinzu, ergibt sich die sogenannte *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix*:

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix}$$

deren Werte $V_{qq'}$ experimentell bestimmt werden müssen. $|V_{qq'}|^2$ gibt dabei die Übergangswahrscheinlichkeit für die Reaktion $q' \to q + W$ an.

Paritätsverletzung

S. P136ff.

Aussage: Ein Operator einer Wechselwirkung, die durch Austausch eines Spin-1-Teilchens beschrieben wird, kann Vektor- ($P(v) = -v$) oder Axialverktor-Charakter ($P(a) = a$) haben.

1. soll sie paritätserhaltend sein, muß sie entweder *rein vektoriell* oder *rein axial* sein
2. soll sie paritätsverletzend sein, muß sie einen Vektoranteil c_V und einen Axialvektoranteil c_A besitzen. Je *weniger* sich die Anteile unterscheiden, desto *stärker* wird die Parität verletzt. Bei *maximaler Paritätsverletzung*, d.h. sie sind *gleich groß*, gibt es zwei Möglichkeiten:
   (a) *V+A-Wechselwirkung*: $c_V = c_A$
   → koppelt ausschließlich an rechtshändige Fermionen und linkshändige Antifermionen
   (b) *V-A-Wechselwirkung*: $c_V = -c_A$
   → koppelt ausschließlich an linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen

Schwache Wechselwirkung und Erhaltungsätze

S. P137f.

Aussage: Die schwache Wechselwirkung ist eine V-A-Theorie, verletzt also die Parität maximal und

koppelt ausschließlich an linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen.

Da in der Natur nur rechtshändige Antineutrinos vorkommen, ist auch die C-Parität (Ladungkonjugation) verletzt, da durch Anwendung der Ladungskonjugation auf rechtshändige Antineutrinos linkshändige Antineutrinos entstehen würden, was aber nicht der Fall ist.

Die kombinierte Anwendung von P und C ist jedoch möglich. Daher spricht man von *CP-Erhaltung* der schwachen Wechselwirkung. Es gibt allerdings eine einzige bekannte Ausnahme, das $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$-System.

Zerfall des Myons

S. P138

Aussage: Ein instruktives Beispiel für die Paritätsverletzung ist der Zerfall eines Myons:

$$\mu^- \to \mathrm{e}^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

Da die schwache Wechselwirkung nur an linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen koppelt, beobachtet man experimentell, daß die Elektronen aus dem Zerfall polarisierter Myonen bevorzugt entgegen der Spinrichtung emittiert werden (linkshändig sind). Dies bezeichnet man als *Rechts-Links-Asymmetrie*:

unterdrückt *bevorzugt*

Der Zerfall des geladenen Pions

S. P138f.

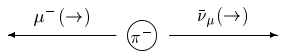
Aussage: Als leichtestes Hadron mit elektrischer Ladung kann das π^- nur in einem semileptonischen schwachen Prozeß (d.h. über ein W^-) zerfallen:

$$\begin{aligned} \pi^- &\to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^- &\to \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

Aufgrund des zur Verfügung stehenden Phasenraums würde man erwarten, daß das Pion etwa 3-5 mal häufiger in ein Elektron als ein Myon zerfallen würde. Tatsächlich ist der zweite gegenüber dem ersten im Verhältnis

$$1 : 8\,000$$

unterdrückt. Die Lösung liegt in *Helizitätsbetrachtungen*: Das Pion hat Spin 0, daher müssen die beiden Leptonen entweder Helizität $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ besitzen. Letzteres ist nicht möglich, da die Helizität des Antineutrinos festliegt. Daher ist nur der folgende Fall denkbar:



$J = 0$

Wären Elektron und Myon masselos, wäre der Zerfall verboten, da das W-Boson nur an linkshändige Leptonen koppelt. Aufgrund ihrer Masse haben sie jedoch eine linkshändige Komponente (sie können „überholt“ werden), die proportional zu $1 - \beta$ ist. Wegen der Kleinheit der Elektronenmasse ist daher

$$1 - \beta_e = 2.6 \cdot 10^{-5} \qquad \text{aber} \qquad 1 - \beta_\mu = 0.72$$

und der Zerfall in ein Elektron entsprechend stark unterdrückt.

Zerfälle des Z^0-Bosons

S. P148

Aussage: Die Zerfälle des Z^0-Bosons wurden am LEP und am SLC experimentell bestimmt:

Z^0	$\to$	$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$	3.4 %
		$\mu^+ + \mu^-$	3.4 %
		$\tau^+ + \tau^-$	3.4 %
		$\nu_{e,\mu,\tau} + \bar{\nu}_{e,\mu,\tau}$	20.0 %
		Hadronen	69.9 %

Das Z^0 koppelt offenbar unterschiedlich an geladene Leptonen und an die ungeladenen Neutrinos, d.h. die Kopplung ist offenbar von der elektrischen Ladung abhängig.

Elektroschwache Vereinheitlichung

S. P148ff.

Aussage: In der *elektroschwachen Vereinheitlichung*, einer Theorie, die von *Glashow*, *Salam* und *Weinberg* entwickelt wurde, werden die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung als *zwei Aspekte einer Wechselwirkung* aufgefaßt:

1. Schwacher Isospin:

   - die *linkshändigen* Fermionen können über $W^{\pm}$ ineinander umgewandelt werden, daher ordnet man sie in *Dubletts*, indem man ihnen eine neue Quantenzahl zuordnet, den schwachen Isospins $T = 1/2$
     → Neutrinos haben $T_3 = +1/2$, e, μ, τ haben $T_3 = -1/2$
     → u, c, t haben $T_3 = +1/2$, d', s', b' haben $T_3 = -1/2$
   - die *rechtshändigen* Fermionen können nicht umgewandelt werden, weshalb man sie in *Singuletts* anordnet und ihnen schwachen Isospins $T = 0$ zuweist

	Fermionmultipletts			**T**	$(\mathbf{T_3})^{\pm}$	$(\mathbf{z_f})^{\pm}$
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$1/2$	$\begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$
	e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	$1/2$	$\begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} +2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
	u_R	c_R	t_R	0	0	$+2/3$
	d_R	s_R	b_R	0	0	-1/3

   Für die entsprechenden Antifermionen kehren sich die Vorzeichen von T_3 und z_f um, was das Symbol $\pm$ andeutet.

2. Weinbergwinkel: da $T_3(W^-) = -1$ und $T_3(W^+) = +1$ sollte es außerdem zwei Zustände mit $T = 1, T_3 = 0$ und $T = 0, T_3 = 0$, die man als W^0 und B^0 bezeichnet. Da die Kopplung des Z^0 aber auch von der el.-magn. Ladung abhängt, kann es nicht mit einem dieser beiden identisch sein. In Analogie zur Cabbibo-Theorie postuliert man daher Z^0 und γ als Linearkombination von W^0 und B^0 mit einem *elektroschwachen Mischungswinkel* θ_w:

$$\begin{pmatrix} |\gamma\rangle \\ |Z^0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |B^0\rangle \\ |W^0\rangle \end{pmatrix}$$

   Die eletrische und die schwache Ladung hängen über den Weinberg-Winkel zusammen:

$$e = g \cdot \sin\theta_w$$

   Den Wert des Weinberg-Winkels kann man experimentell bestimmen:

$$\sin^2\theta_w = 0.2319 \pm 0.0005$$

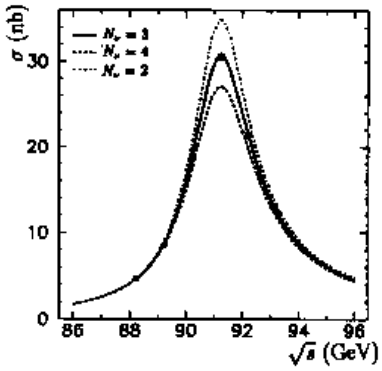
Experimenteller Nachweis für die Anzahl leichter Neutrinos

S. P151ff.

Aussage: Die Anzahl leichter Neutrinos läßt sich experimentell durch Vermessung der Z^0-Resonanz in der Reaktion

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

bestimmen. Da die Höhe des Resonanzmaximums durch die Partialbreiten gegeben ist, würde eine vierte Generation von Neutrinos das Maximum um 166 MeV erhöhen. Die Präzissionsmessungen am LEP haben ergeben, daß dies nicht der Fall ist. Die Abbildung zeigt die Ergebnisse des OPAL-Experiments:



Definition: **Nichtrelativistisch**

S. G160

Aussage: Ein System heißt *nichtrelativistisch*, wenn die Bindungsenergie klein ist im Vergleich mit der Ruheenergie der Konstituenten.
Beispiel: Wasserstoff

- Bindungsenergie: 13.6 eV
- Ruheenergie des Elektrons: 511 000 eV

⇒ mit Sicherheit nichtrelativistisch.

Quarkonia

S. P163/P181

Aussage: Den Bindungszustand von Quark-Antiquark-Paaren nennt man *Quarkonium*.

- im Falle der schwereren Quarksorten, $c\bar{c}$ (Charmonium) und $b\bar{b}$ (Bottonium), lassen sich Quarkonia - in Analogie zum Wasserstoffatom bzw. Positronium - *näherungsweise nichtrelativistisch* behandeln
- wegen der hohen Masse und daher sehr kurzen Lebensdauer des t-Quarks erwartet man für das Toponium *keine scharfen $t\bar{t}$-Zustände*
- die leichteren Quarksorten (u, d und s) unterscheiden sich in ihrer Masse nur wenig voneinander, daher muß man mit *Mischzuständen* dieser drei Quarks rechnen; außerdem lassen sich diese Mesonen nur *semiquantitativ* mit einem nichtrelativistischen Modell beschreiben - daß dies überhaupt möglich ist, verdankt man dem Konzept der *Konstituentenquarks*

Charmonium

S. P166ff.

Aussage: Als *Charmonium* bezeichnet man den Bindungszustand $c\bar{c}$.

- wegen der relativ großen Masse des c-Quarks ($\approx 1\,\mathrm{GeV}/c^2$) läßt sich dieses System *näherungsweise nichtrelativistisch* beschreiben
- das *Spektrum* der niederenergetischen Anregungszustände ist dem des *Positroniums* für $n = 1, 2$ recht ähnlich
- man untersucht das Charmonium mit Hilfe eines 4π-*Crystal Barrel*-Detektors
- das *Potential* zeigt folgendes asymptotisches Verhalten:

$$V(r \to 0) \propto \frac{1}{r} \qquad \text{und} \qquad V(r \to \infty) \to \infty$$

daher läßt sich das Potential näherungsweise wie folgt ansetzen:

$$V = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)\ \hbar c}{r} + k \cdot r$$

Der erste Term beschreibt ein *Coulomb-Potential*, beim zweiten sind die Feldlinien zwischen beiden Quarks „gespannt“; k bezeichnet die Feldenergie pro Länge und heißt *Saitenspannung* (*string tension*)
Obwohl das Potential mit zunehmendem Abstand beliebig groß wird, ist es möglich, ein Quark abzutrennen: Bei ca. 1-2 fm reißt die Flußröhre und die freiwerdende Feldenergie wird in ein $q\bar{q}$-Paar umgewandelt, so daß zwei farbneutrale Hadronen entstehen (*Hadronisierung*)

***Definition:* Vektor- und pseudoskalare Mesonen**

S. P181

Aussage: Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark:

- Parität: Quark und Antiquark haben entgegengesetzte Parität, daher ist die Mesonparität im Grundzustand ($L = 0$):

$$(-1)^{L+1} = -1$$

- Gesamtdrehimpuls: Quark und Antiquark können zum Gesamtspin $S = 1$ und $S = 0$ koppeln:
  1. Mesonen mit $J^P = 0^-$ heißen *pseudoskalare Mesonen*
  2. Mesonen mit $J^P = 1^-$ heißen *Vektor-Mesonen*

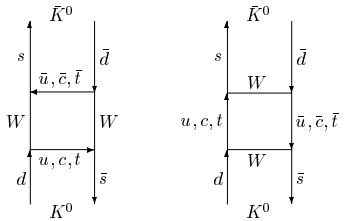
CP-Verletzung

S. P189ff./G144ff.

Aussage: Da das K^0 und das $\bar{K}^0$ in die gleichen Endzustände zerfallen, können sie sich über einen virtuellen pionischen Zwischenzustand *ineinander umwandeln*:

$$K^0 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\pi \\ 3\pi \end{array} \right\} \leftrightarrow \bar{K}^0$$

Diese Umwandlungen beschreibt man durch sogenannte *Boxdiagramme*:



Die dabei entstehenden Zwei- bzw. Drei-Pionen-Systeme sind Eigenzustände des $\mathcal{CP}$-Operators:

$$\mathcal{CP}\,|\pi^0\pi^0\rangle = +1 \cdot |\pi^0\pi^0\rangle\,, \qquad \mathcal{CP}\,|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -1 \cdot |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle\,,$$
$$\mathcal{CP}\,|\pi^+\pi^-\rangle = +1 \cdot |\pi^+\pi^-\rangle\,, \qquad \mathcal{CP}\,|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = -1 \cdot |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$$

während sich K^0 und $\bar{K}^0$ durch den $\mathcal{CP}$-Operator ineinander umwandeln, also keine Zustände mit definierter CP-Parität sind:

$$\mathcal{CP}\,|K^0\rangle = -1 \cdot |\bar{K}^0\rangle \qquad \text{und} \qquad \mathcal{CP}\,|\bar{K}^0\rangle = -1 \cdot |K^0\rangle$$

Aufgrund der CP-Erhaltung der schwachen Wechselwirkung muß es jedoch Linearkombinationen von K^0 und $\bar{K}^0$ geben, die CP-Eigenzustände sind:

$$|K_1^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\,\Big) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{CP}\,|K_1^0\rangle = +1 \cdot |K_1^0\rangle$$
$$|K_2^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\,\Big) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{CP}\,|K_2^0\rangle = -1 \cdot |K_2^0\rangle$$

Wegen CP-Erhaltung sollte K_1^0 in zwei Pionen und K_2^0 in drei Pionen zerfallen und, da der Phasenraum für den 3-Pion-Zerfall erheblich kleiner ist, das K_2^0 wesentlich langlebiger sein als das K_1^0.
Im Experiment erzeugt man das K^0 z.B. über die Reaktion $p + n \to p + \Lambda^0 + K^0$. In der Tat beobachtet man *ein langlebiges K_L^0 und ein kurzlebiges K_S^0*.

CP-Verletzung: (Fitch-Cronin-Experiment)

1. in hinreichendem Abstand sind nur noch K_L^0-Teilchen im Strahl, die nur in drei Pionen zerfallen sollten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2.9 \cdot 10^{-3}$ zerfällt es jedoch auch in drei Pionen ⇒ CP-Verletzung!

2. das K_L^0 zerfällt nicht nur in drei Pionen sondern auch in

   $$(a) \quad \pi^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e \qquad \text{und} \qquad (b) \quad \pi^- + \mathrm{e}^+ + \nu_e$$

   dabei zerfällt es um den Bruchteil $3.3 \cdot 10^{-3}$ häufiger (d.h. 1.0033:1) in (b) als in (a). Der $\mathcal{CP}$-Operator aber überführt (a) in (b) ⇒ CP-Verletzung!

Experimente zur Erzeugung von Baryonen

S. P196

Aussage: Baryonen können durch zwei Arten von Experimenten erzeugt werden:

1. Formationsexperimente: hier wird das Baryon als *Resonanz* im Wirkungsquerschnitt identifiziert
   → nur Produktion angeregter Zustände von Nukleonen sowie Hyperonen mit Strangeness $S = -1$

2. Produktionsexperimente: hier schießt man einen Strahl von Protonen, Pionen oder Kaonen mit möglichst hoher Energie auf ein Target
   → Erzeugung aller Arten von Baryonen
   → Identifikation über die *Methode der invarianten Masse:* man sucht nach Resonanzen im Spektrum der invarianten Masse

   $$M_X^2 c^4 = p_X^2 c^2 = \left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c\right)^2$$

Wellenfunktion eines Baryons

S. P199f.

Aussage: Ein Baryon ist aus drei Quarks aufgebaut. Seine *Gesamtwellenfunktion*

$$\psi_{\text{Baryon}} = \xi_{\text{Ort}} \cdot \chi_{\text{Spin}} \cdot \zeta_{\text{Flavour}} \cdot \varphi_{\text{Farbe}}$$

muß dem *Pauliprinzip* genügen und daher *total antisymmetrisch* bezüglich Vertauschung zweier Quarks sein. Beschränkt man sich auch den Grundzustand mit $L = 0$, so kann der Gesamtdrehimpuls die Werte $J = S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ annehmen.

1. $J = \frac{3}{2}$: Baryondekuplett

   - $L = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \xi_{\text{Ort}}$ symmetrisch
   - $J = \frac{3}{2} \Rightarrow$ alle Spins gleichgerichtet $\Rightarrow \chi_{\text{Spin}}$ symmetrisch
   - $|u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$: ζ_{Flavour} symmetrisch, sonst Symmetrisierung
     $\rightarrow$ z.B. $|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \right\}$

   $\Rightarrow$ Farbwellenfunktion muß total antisymmetrisch sein:

   $$\varphi_{\text{Farbe}} := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha=r,g,b} \sum_{\beta=r,g,b} \sum_{\gamma=r,g,b} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \; |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle$$

   $\Rightarrow$ 10 Baryonen mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ und total antisymmetrischer Wellenfunktion

2. $J = \frac{1}{2}$: Baryonoktett

   - $L = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \xi_{\text{Ort}}$ symmetrisch
   - $J = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Spins $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle \Rightarrow \chi_{\text{Spin}}$ mit gemischter Symmetrie

   $\Rightarrow$ ζ_{Flavour} muß auch gemischte Symmetrie haben
   $\rightarrow$ $|uuu\rangle, |ddd\rangle, |sss\rangle$ mit $J = \frac{1}{2}$ nicht möglich

   $\Rightarrow$ 8 Baryonen mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ und total antisymmetrischer Wellenfunktion

Kernkraft: Potential aus Nukleon-Nukleon-Streuung

S. P220ff.

Aussage: Betrachtet man die Streuung eines Nukleons im Potential eines anderen Nukleons, so kann man das einlaufende als ebene Welle und das auslaufende als Kugelwelle betrachten. Der Wirkungsquerschnitt ist dann durch die Streuamplitude $f(\theta)$ gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

Bei einer Streuung am kurzreichweitigen Potential benutzt man eine *Partialwellenzerlegung*, d.h. eine Entwicklung der gestreuten Welle nach Anteilen mit festem Drehimpuls l für große Abstände r (P_l = Legendre-Polyonm l-ter Ordnung):

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \; e^{i\delta_l} \; \sin\delta_l \; P_l(\cos\theta)$$

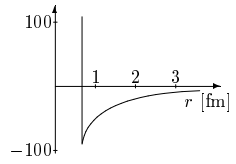
mit Wellenzahl des gestreuten Nukleons

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar}$$

Die Zerlegung ist vor allem günstig bei niedrigen Energien, da nur die kleinsten Drehimpulse beitragen, denn für ein Potential der Reichweite a gilt stets

$$l \leq \frac{|\vec{p}| \cdot a}{\hbar}$$

Durch Analyse der Streuphasen δ_l, die den Phasenunterschied zwischen der gestreuten l-ten Partialwelle und der ungestreuten Welle angibt, erhält man Informationen über das Potential. Dabei zeigt sich, daß δ_0 bis zu einem bestimmten Impuls positiv ist und darüber hinaus das Vorzeichen wechselt. Im Bereich mit $\delta_0 > 0$ dominiert das abstoßende Potential, der *Hard Core*, bei $\delta_0 < 0$ gewinnt der Anziehende Teil des Potentials die Oberhand:



Das Deuteron

S. P224ff.

Aussage: Das *Deuteron* ist der gebundene Zustand von Proton und Neutron mit einer Bindungsenergie von $B = 2.225$ MeV und den Quantenzahlen $J^P = 1^+$ und $I = 0$. Es befindet sich vorwiegend im Grundzustand ($l = 0$), dessen magnetisches Moment

$$\mu = 0.86\mu_N$$

nur leicht von der Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron abweicht:

$$\mu_p + \mu_n = 2.79\mu_N - 1.91\mu_N = 0.88\mu_N$$

Dies erklärt sich durch die 4%ige Beimischung eines Zustands mit den gleichen Quantenzahlen J^P

$$|\psi_d\rangle = 0.98 \cdot |^3S_1\rangle + 0.20 \cdot |^3D_1\rangle$$

Setzt man das Potential als Topf mit Tiefe V und Reichweite a an, ergeben sich aus der Schrödingergleichung

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2m\,(E-V)}{\hbar^2}u(r) = 0 \qquad \text{mit} \qquad u(r) := \psi(r) \cdot r$$

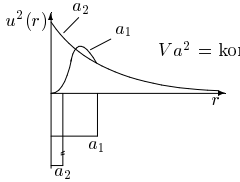
folgende Lösungen:

$$r < a: \qquad u_I(r) = A \sin kr \qquad \text{mit} \qquad k := \sqrt{2m\,(E-V)}/\hbar, \quad V < 0$$
$$r > a: \qquad u_{II}(r) = Ce^{-\kappa r} \qquad \text{mit} \qquad \kappa := \sqrt{-2mE}/\hbar, \quad E < 0$$

Mit Hilfe von Stetigkeitsbedingungen auf dem Rand $r = a$ ergibt sich daraus:

$$Va^2 \approx 100 \text{ MeV fm}^2$$

was mit den gängigen Werten für die Reichweite von $a \approx 1.2 \cdots 1.4$ fm eine Potentialtiefe von $V \approx 50$ MeV ergibt.



$Va^2 = \text{konst.}$

Bei größeren Abständen r unterscheidet sich das Potential für verschiedene a kaum von einander.

Klein-Gordon-Gleichung

S. P232

Aussage: Ersetzt man in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$$

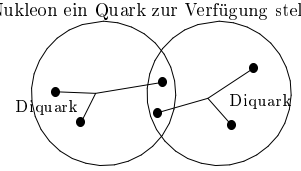
Energie und Impuls durch ihre quantenmechanischen Operatoren $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ und $-i\hbar\vec{\nabla}$, ergibt sich die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{x},t) = (\vec{\nabla}^2 - \mu^2)\,\Psi(\vec{x},t) \qquad \text{mit} \qquad \mu := \frac{mc}{\hbar}$$

Die Kernkraft

S. P228ff.

Aussage: Die *Kernkraft* zwischen zwei Nukleonen läßt sich näherungsweise als eine Art *kovalente Bindung*, bei der jedes Nukleon ein Quark zur Verfügung stellt, ansehen:



Dabei sind jeweils ein u- und ein d-Quark zu einem *Diquark* mit Spin 0 und Isospin 0 gekoppelt. Die kovalente Bindung besteht im Austausch des „Einzel"quarks. Dieser effektive Quark-Quark-Austausch kann auch durch farbneutrale Quark-Antiquark-Paare vermittelt werden, die aufgrund der Seequarks zur Verfügung stehen. Dieser Quark-Antiquark-Austausch liefert sogar einen größeren Beitrag zur Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung als der direkte Quark-Quark-Austausch. Er ist weitgehen äquivalent zum Austausch von Mesonen, der durch das *Yukawa-Potential* beschrieben wird:

$$V = g \cdot \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r} \qquad \text{mit} \qquad g = \text{konstant}$$

Dieses läßt sich als Lösung der *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{x},t) = (\vec{\nabla}^2 - \mu^2)\,\Psi(\vec{x},t) \qquad \text{mit} \qquad \mu := \frac{mc}{\hbar}$$

gewinnen, wenn man ein statisches, kugelsymmetrisches Feld fordert, so daß die Klein-Gordon-Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right) - \mu^2\psi(r) = 0$$

Diese Gleichung geht für masselose Austauschteilchen ($\mu = 0$) in die Poisson-Gleichung mit dem Coulombpotential $V_C \propto \frac{1}{r}$ über.
Die Reichweite des Yukawa-Potentials beträgt näherungsweise

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{mc},$$

was im Falle ein Pions etwa 1.4 fm entspricht. Für die Kernkraft gilt für

- <u>große Abstände</u>: das Meson-Modell des 1-Pion-Austausches ist eine gute Näherung
- <u>kleine Abstände</u>: das Quark-Modell der kovalenten Bindung ist eine gute Näherung

Das Fermigasmodell

S. 235ff.

Aussage: Aufgrund der schwachen Bindung zwischen Nukleonen kann man sie als näherungsweise freie Teilchen im Kern betrachten. Als Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen genügen sie dabei der Fermi-Dirac-Statistik. Im Grundzustand des Kerns (bei Temperatur $T = 0$) findet das *Fermigasmodell* Anwendung: Die Zahl der möglichen Zustände in einem Volumen V und Impulsintervall dp ist

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}V \qquad (\star)$$

Im Grundzustand sind diese Zustände bis zu einem maximalen Impuls p_F besetzt, den man durch Integration von $(\star)$ erhält:

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2\hbar^3}$$

Nach dem Pauli-Prinzip kann jeder Zustand zwei Protonen und zwei Neutronen beherbergen. Setzt man daher in die Formel das Kernvolumen

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \qquad \text{mit} \qquad R_0 = 1.21 \text{ fm}$$

ein so ergibt sich ein *Fermi-Impuls* von etwa

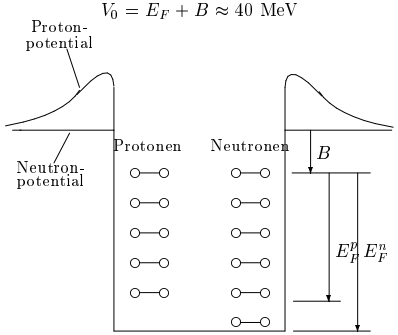
$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 250 \text{ MeV/c}$$

und eine Fermi-Energie von etwa

$$E_F := \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV}$$

Da die Bindungsenergie pro Nukleon etwa $B = 7 - 8$ MeV beträgt erhält man für die Potentialtiefe

$$V_0 = E_F + B \approx 40 \text{ MeV}$$



Zyklotronformel

S. G9

Aussage: Bewegt sich ein Teilchen mit Ladung q und Impuls p in einem Magnetfeld B und beschreibt dabei einen Kreis mit Radius R, so besitzt es einen Impuls

$$p = \frac{q}{c}\, R \cdot B$$

Compton-Wellenlänge

S. G17f.

Aussage: Trifft ein Photon der Wellenlänge λ auf ein ruhendes Teilchen der Masse m und wird dabei um den Winkel θ gestreut, so beträgt seine Wellenlänge nach der Streuung

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

wobei

$$\lambda_c := \frac{h}{mc}$$

die sogenannte *Compton-Wellenlänge des Targetteilchens* ist.

Seltsamkeit und Wechselwirkungen

S. G35f.

Aussage: Bei Experimenten am Brookhaven Cosmotron, dem ersten modernen Teilchenbeschleuniger, fand man in den 50iger Jahren Teilchen, die man *seltsam* nannte, weil sie über die *starke Wechselwirkung* und damit *reichlich* (innerhalb etwa 10^{-23}s) *erzeugt* wurden, aber über die *schwache Wechselwirkung* und damit *langsam* ($\tau \approx 10^{-10}$s) *zerfielen*. Das erklärt man dadurch, daß diese Teilchen eine neue Quantenzahl S (*Strangeness* - Seltsamkeit) enthalten, die

- in der *starken* Wechselwirkung *erhalten*
- in der *schwachen* Wechselwirkung *nicht* erhalten

ist.

Dauer verschiedener Wechselwirkungen

S. G79

Aussage: Die Dauer verschiedener Wechselwirkungen ist von folgender Größenordnung:

starker Zerfall	10^{-23}s
elektromagnetischer Zerfall	10^{-16}s
starker Zerfall	10^{-13}s (τ) - 15 min. (Neutron)

Ein bestimmter Zerfall verläuft dabei umso schneller je größer der Massenunterschied zwischen ursprünglichem Teilchem und Zerfallsprodukten ist.
Beispiel: Da $m_n \approx m_p + m_e$ ist die Lebensdauer des Neutrons so lange:

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

Die Lebensdauer eines stark zerfallenden Teilchens, 10^{-23}s, entspricht der Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um ein Hadron zu durchqueren ($\approx 10^{-15}$m), weshalb man diese Lebensdauer nicht durch Messung der Länge seiner Spur bestimmen kann. Man verwendet daher die Massenunschärfe Δm über die Unschärferelation ($\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$) mit $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$, so daß sich ergibt:

$$\tau = \frac{\hbar}{\Delta m \cdot c^2}$$

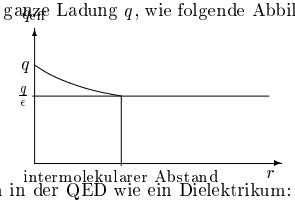
Laufende Kopplungskonstante

S. G68f.

Aussage: Gegeben sei eine punktförmige elektrische Ladung q, die in ein dielektrisches Medium eingebettet ist. Dann lagern sie die polarisierten Moleküle des Dielektrikums um q herum an, so daß die Ladung ein wenig abgeschirmt wird und man weiter weg nur eine *effektive Ladung*

$$q_{\text{eff}} = \frac{q}{\epsilon}$$

„sieht“, wobei ϵ *Dielektrizitätskonstante* heißt. Wenn man nahe genug an die Ladung herangeht, sieht man die ganze Ladung q, wie folgende Abbildung verdeutlicht:



Das Vakuum verhält sich in der QED wie ein Dielektrikum: es läßt *Elektron-Positron-Paare* hervorsprießen („*Vakuumpolarisation*“), die die Ladung abschirmen. In praktisch allen physikalischen Experimenten arbeiten wir mit der *effektiven* und nicht mir der *wahren* Ladung. Lediglich bei der *Lamb-Verschiebung* z.B. treten so winzige Abstände auf, daß dies zu sichtbaren Effekten führt.
In der QCD tritt der gleiche Effekt auf, jedoch gibt es

1. Quark-Antiquark-Polarisation: $\alpha_s \nearrow$ für $r \to 0$
   → entspricht Elektron-Positron-Polarisation
2. Gluon-Polarisation: $\alpha_s \searrow$ für $r \to 0$
   → kein Analogon in der QED

Ob die Kopplung bei kleinen Abständen ab- oder zunimmt, hängt nun von folgender Formel ab:

$$a \equiv 2f - 11n = \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad \alpha_s \nearrow \text{ für } r \to 0 \\ < 0 & \Rightarrow \quad \alpha_s \searrow \text{ für } r \to 0 \end{cases}$$

wobei f die Anzahl an *flavours* und n die Anzahl Farben bezeichnet. Da im Standardmodell $f = 6$ und $n = 3$ ist also

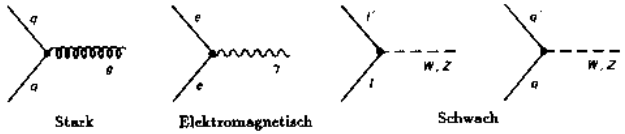
$$a = -21$$

und damit nimmt die QCD-Kopplung bei kleinen Abständen ab (*asymptotische Freiheit*).

Wechselwirkungen: Fundamentale Vertizes

S. G80

Aussage: Die fundamentalen Vertizes der drei Wechselwirkungen ergeben sich wie folgt:



Wechselwirkungen: Erhaltungssätze

S. G80ff.

Aussage: Folgende Größen sind bei allen Wechselwirkungen erhalten:

1. Ladung
2. Farbladung: „Null rein - null raus!“
3. Baryonzahl: Baryon: $A = 1$, Anti-Baryon: $A = -1$, alle anderen: $A = 0$
4. Lepton(familien)zahl: $L = L_e + L_\mu + L_\tau = \text{konstant}$
   → kein Cabbibo-Winkel bei Leptonen

Folgende Größen sind bei einigen Wechselwirkungen erhalten:

1. Flavour: in der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten
   → in der schwachen nur *annähernd* (Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix)

Zweig- oder OZI-Regel

S. G82f./P118

Aussage: Die *Zweig-* oder *OZI-Regel* besagt, daß Prozesse, die über virtuelle Gluonen erfolgen, gegenüber anderen Prozessen, unterdrückt sind.

Lorentz-Transformation und deren Auswirkungen

S. G90ff.

Aussage: Ein Koordinatensystem S' mit (x',y',z',t) bewege sich gegenüber einem zweiten S mit (x,y,z,t) mit konstanter Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse, dann lassen sich die Koordinaten mit Hilfe einer *Lorentz-Transformation* ineinander umrechnen:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x-vt) \qquad \text{mit} \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1 \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

Lorentz-Transformationen haben folgende *direkten Konsequenzen*:

1. Relativität der Gleichzeitigkeit: gleichzeitige Ereignisse in S an verschiedenen Orten finden in S' *nicht gleichzeitig* statt:

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A) \qquad \text{mit} \qquad t_A = t_B$$

2. Längenkontraktion: Habe ein Stab zum Zeitpunkt $t=0$ in S die Länge L, dann hat er in S' die Länge

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

→ gilt nur *entlang* der Bewegungsrichtung!

3. Zeitdilatation: Eine Uhr im Ursprung von S' laufe von $t'=0$ bis $t'=T'$; in S laufe sie von $t=0$ bis S' bei $t'=T'$ in $x'=0$ ist, dann ist

$$T = \gamma T'$$

→ die aufgrund der kosmischen Strahlung in der Atmosphäre erzeugten Myonen würden es sonst gar nicht bis zur Erdoberfläche schaffen

4. Addition von Geschwindigkeiten: es ergibt sich

$$u = \frac{u'+v}{1+(u'u/c^2)}$$

→ geht für $u'u \ll c^2$ in den klassischen Fall $u = u'+v$ über
→ für $u'=c$ ist auch $u=c$, d.h. die *Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich*!

(Axial-)Vektor und (Pseudo-)Skalar

S. G140

Aussage: Vektoren, Axial-Vektoren, Skalar und Pseudoskalare lassen sich mit Hilfe des Paritätsoperators P, der folgendermaßen definiert ist

$$P^2 = \mathbf{1},$$

unterscheiden:

Skalar	$P(s) = s$	
Pseudoskalar	$P(p) = -p$	z.B. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
Vektor (Polarvektor)	$P(\vec{v}) = -\vec{v}$	
Axialvektor (Pseudovektor)	$P(\vec{a}) = \vec{a}$	z.B. $\vec{a}\times\vec{b}$

Parität von Fermionen, Bosonen und Mesonen

S. G140f.

Aussage:

- Fermionen haben *entgegengesetzte* Parität wie Antifermionen
- Bosonen haben die *gleiche* Parität wie Antibosonen
- Quarks haben Parität $+1$
- Antiquarks haben Parität -1
- Photonen (Spin 1) haben Parität -1

Bei zusammengesetzten Systemen gilt, daß die Parität eine *multiplikative Quantenzahl* ist:

- Baryonen (qqq) haben Parität $(+1)^3 = +1$
- Mesonen $(q\bar{q})$ haben Parität $(+1)(-1) = -1$
- angeregte Mesonen haben Parität $(-1)^{l+1}$

CPT-Theorem

S. G149

Aussage: Das *CPT-Theorem* folgt aus der Quantenfeldtheorie und ist allein mit

- Lorentz-Invarianz
- Quantenmechanik
- WW-Vermittlung durch Felder

begründet. Da aber im *Fitch-Cronin-Experiment* CP verletzt wird, muß auch T verletzt sein, damit CPT-Erhaltung gilt.
Test des CPT-Theorems:
Wenn das CPT-Theorem gilt, dann muß jedes Teilchen genau dieselbe Masse und Lebensdauer wie sein Antiteilchen haben. Die Massendifferenz von $K^0 - \bar{K}^0$ wurde (normiert auf die Masse des K^0) als

$$< 6 \cdot 10^{-19}$$

bestimmt.

Vergleich Wasserstoff-Positronium

S. G176f.

Aussage: Der wesentliche Unterschied zwischen Wasserstoff (p^+e^-) und Positronium (e^+e^-) ist das *Massenverhältnis* der Konstituenten:

$$\frac{m_{p^+}}{m_{e^-}} \approx 1\,000 \qquad \text{und} \qquad \frac{m_{e^+}}{m_{e^-}} = 1$$

daher ergibt sich eine unterschiedliche *reduzierte Masse*

$$\begin{aligned} \text{Wasserstoff:} \quad m_{red} &= \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \approx m_e \\ \text{Positronium:} \quad m_{red} &= \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2} \end{aligned}$$

und die Hyperfeinstruktur (Spin-Bahn-Kopplung des Protons/Positrons), die beim Wasserstoff um den Faktor m_e/m_p gegenüber der Feinstruktur (Spin-Bahn-Kopplung des Elektrons) unterdrückt ist, hat beim Positronium wegen $m_{e^+}/m_{e^-} = 1$ dieselbe Größenordnung wie die Feinstruktur.

Meson- und Baryonmassen

S. G188f./G200ff.

Aussage: Die Masse von zusammengesetzten Systemen (Mesonen, Baryonen) ist nicht genau die Summe der Massen der Konstituenten, da sich die Wechselwirkung zwischen den Spins der Quarks (Spin $\frac{1}{2}$) bemerkbar macht. Daher gilt für die Masse von *Mesonen:*

$$M(\text{Meson}) = m_1 + m_2 + A\,\frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}}{m_1 m_2}$$

wobei A einen Koeffizienten darstellt, der von $|\psi(0)|^2$ abhängt. Entsprechend ergibt sich die Masse eines *Baryons*:

$$M(\text{Baryon}) = m_1 + m_2 + m_3 + A'\left(\frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S_1}\cdot\vec{S_3}}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S_2}\cdot\vec{S_3}}{m_2 m_3}\right)$$

Die so berechneten Massen stimmen auf etwa 1% mit den experimentell bestimmten Massen überein.

Faustregel für Ereignisrate in Streuexperimenten

S. G214

Aussage: Die Faustregel eines Beschleunigungsphysikers für die Ereignisraten in einem Streuexperiment lautet:

„Die Ereignisrate ist Wirkungsquerschnitt mal Luminosität“

oder in Formeln:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \mathcal{L}\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

oder umgeformt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{dN}{d\Omega}$$

Die Goldene Regel für Zerfälle

S. G215

Aussage: Betrachten wir den Zerfall eines Teilchens in verschiede andere Teilchen:

$$1 \to 2 + 3 + \cdots + n$$

dann ergibt sich nach der *Goldenen Regel* folgende Formel für die *Zerfallsrate*:

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{c}{(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i}\right)(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 \cdots - p_n)$$

wobei S ein statistischer Faktor ist ($\frac{1}{j!}$ für jede Gruppe von j identischen Teilchen im Endzustand). Die Delta-Funktion sorgt für Energie-Impuls-Erhaltung.

Die Goldene Regel für Streuung

S. G219

Aussage: Betrachten wir die Kollision zweier Teilchen, bei der unterschiedliche Teilchen entstehen:

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \cdots + n$$

dann ergibt sich nach der *Goldenen Regel* folgende Formel für den *Wirkungsquerschnitt*:

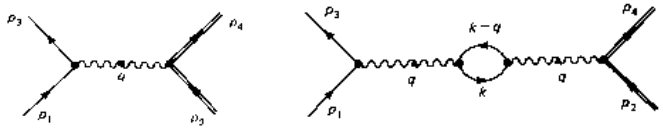
$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{c}{(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i}\right)(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \cdots - p_n)$$

wobei S ein statistischer Faktor ist ($\frac{1}{j!}$ für jede Gruppe von j identischen Teilchen im Endzustand). Die Delta-Funktion sorgt für Energie-Impuls-Erhaltung.

Renormierung

S. G227ff./G270ff.

Aussage: Zum Feynman-Diagramm der Streuung zweier Teilchen in niedrigster Ordnung (links) gibt es eine Reihe weiterer Graphen vierter Ordnung, von denen das wohl interessanteste dasjenige ist, welches rechts zu sehen ist:



Die Amplitude des linken Diagramms ist:

$$\mathcal{M} = -g_e^2\ [\bar{u}(p_3)\ \gamma^\mu\ u(p_1)]\ \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\ [\bar{u}(p_4)\ \gamma^\nu\ u(p_2)] \qquad \text{mit} \qquad q = p_1 - p_3$$

Berücksichtigt an auch noch das rechte Diagramm, muß man den Photon-Propagator modifizieren:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \to \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^4} I_{\mu\nu}$$

mit

$$I_{\mu\nu} := -g_e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\ (\not{k} + mc)\ \gamma_\nu\ (\not{q} - \not{k} + mc)]}{(k^2 - m^2c^2)\ ((q-k)^2 - m^2c^2)}$$

Dieses Integral sollte wegen $d^4k = k^3 dk$ divergieren: $\int |k| dk = |k|^2$ für $|k| \to \infty$ (in Wirklichkeit divergiert es wegen Kürzungen nur mit $\ln |k|$ wie man unten sieht). Dies war eines der größten Probleme bei der Formulierung der QED. Man löst es wie im folgenden gezeigt durch sog. *Renormierung*. Umformungen bringen $I_{\mu\nu}$ in diese Form:

$$I_{\mu\nu} = -i g_{\mu\nu} \frac{g_e^2}{12\pi^2} q^2 \left\{ \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x} - 6 \int_0^1 z(1-z) \ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2c^2} z(1-z)\right) dz \right\}$$

Nur das erste Integral divergiert - man macht es endlich durch Einführung einer *Abschneidemasse* M:

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \to \int_{m^2}^{M} \frac{dx}{x} = \ln \frac{M^2}{m^2}$$

Das zweite Integral nennen wir $f(x)$. Dann ergibt sich für die Amplitude unter Berücksichtigung beider Diagramme:

$$\mathcal{M} = -g_e^2\ [\bar{u}(p_3)\ \gamma^\mu\ u(p_1)]\ \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left\{ 1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2} \left[\ln \frac{M^2}{m^2} - f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right) \right] \right\} [\bar{u}(p_4)\ \gamma^\nu\ u(p_2)]$$

Nun „saugen“ wir die Divergenz für $M \to \infty$ „auf“, indem wir die Kopplungskonstante *renormieren*:

$$g_R := g_e \sqrt{1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{m^2}}$$

so daß wir jetzt eine endliche Amplitude haben

$$\mathcal{M} = -g_R^2\ [\bar{u}(p_3)\ \gamma^\mu\ u(p_1)]\ \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left\{ 1 + \frac{g_R^2}{12\pi^2} f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right) \right\} [\bar{u}(p_4)\ \gamma^\nu\ u(p_2)]$$

um den Preis „laufender“ Kopplungskonstanten: ($g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$)

$$g_R(q^2) = g_R(0) \sqrt{1 + \frac{g_R^2(0)}{12\pi^2} f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right)} \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha(q^2) = \alpha(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right) \right\}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt für Zweikörper-Streuung

S. G219f.

Aussage: Für die Kollision zweier Teilchen

$$1 + 2 \to 3 + 4$$

ergibt sich nach Auswertung der Goldenen Regel für Streuung folgende Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}$$

wobei $|\vec{p}_f|$ der Betrag der auslaufenden und $|\vec{p}_i|$ der Betrag der einlaufenden Impulse und S ein statistischer Faktor ist.

Klein-Gordon-Gleichung

S. G236

Aussage: Ausgangspunkt: *relativistische Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \tag{1}$$

Mit Hilfe der Quantenvorschrift $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ erhält man daraus die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$-h^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \tag{2}$$

oder

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi \tag{3}$$

Beachte: Gleichung zweiter Ordnung in t (im Gegensatz z.B. zur Schrödingergleichung die erster Ordnung in t ist).

Die Dirac-Gleichung

S. G236ff.

Aussage: Ausgehend von der Klein-Gordon-Gleichung, die von zweiter Ordnung in t ist, suchte Dirac eine Formel, die

1. konsistent mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung
2. von erster Ordnung in t ist

Strategie Diracs: Faktorisierung der Energie-Impuls-Beziehung:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) \stackrel{!}{=} (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)$$

mit acht zu bestimmenden Koeffizienten β^κ und γ^λ.
Da wir die gemischen Terme, da sie die linear in p_κ sind, nicht haben wollen, müssen wir $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ wählen und erhalten:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$$

Die rechte Seite entspricht nur dann der linken, wenn wir es schaffen, die Mischterme loszuwerden, also:

$$(\gamma^0)^2 \stackrel{!}{=} 1, \qquad (\gamma^i)^2 \stackrel{!}{=} -1,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \stackrel{!}{=} 0, \qquad \text{für } \mu \neq \nu$$

oder kurz ($\{A,B\} \equiv AB + BA$: *Antikommutator* $\{A,B\} \equiv AB + BA$):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \stackrel{!}{=} 2g^{\mu\nu}$$

Diracs geniale Idee: Matrizen als Lösung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

wobei 1 die 2x2-Einheitsmatrix, 0 die 2x2-Nullmatrix und die σ^i die *Paulimatrizen*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

darstellen.
Die Energie-Impuls-Beziehung läßt sich nun faktorisieren und mit Hilfe der Quantisierungsvorschrift $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ erhält man aus dem zweiten Faktor[1] die *Dirac-Gleichung*

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$$

mit dem *"Dirac-Spinor"* (oder: *"Bi-Spinor"*):

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Beachte: ψ ist kein Vierervektor!

Ortsunabhängige Lösungen der Dirac-Gleichung

S. G239f.

Aussage: Für *ortsunabhängiges* ψ erhält man die beiden Lösungen

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0), \qquad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0)$$

wobei

$$\psi_A := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi_B := \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Die Wellenfunktion ψ_A beschreibt *Elektronen* mit der Energie $E = mc^2$, während ψ_B deren *Antiteilchen*, die *Positronen*, mit 'negativer' Energie $E = -mc^2$ darstellt.
Wir erhalten also (bis auf Normierungsfaktoren) vier unabhängige Lösungen der *ortsunabhängigen Dirac-Gleichung*:

$$\psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. jeweils ein Spin up und Spin down Elektron bzw. Positron.

Lösungen der Dirac-Gleichung in Form von ebenen Wellen

S. G240ff.

Aussage: Wir suchen Lösungen der Form

$$\psi(\vec{r},t) = a\, e^{-(i/\hbar)\, x\cdot p}\, u(p)$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung liefert die sog. *"Impulsraum-Dirac-Gleichung"*

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\, u = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$u_A = \frac{c}{E-mc^2}\,(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, u_B, \qquad u_B = \frac{c}{E+mc^2}\,(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, u_A$$

Setzt man eine Lösung in die andere ein und normiert (nach Halzen und Martin)

$$u^\dagger u \stackrel{!}{=} 2\frac{|E|}{c}$$

so ergeben sich vier unabhängige Lösungen:

$$u^{(1)}(E,\vec{p}) = N\tfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\\p_z\\p_x+ip_y\end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(E,\vec{p}) = N\tfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\\p_x-ip_y\\-p_z\end{pmatrix}$$

$$v^{(1)}(-E,-\vec{p}) = N\tfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}p_x-ip_y\\-p_z\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(-E,-\vec{p}) = -N\tfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}p_z\\p_x+ip_y\\1\\0\end{pmatrix}$$

mit der Normierungskonstante

$$N := \sqrt{(|E|+mc^2)/c}$$

wobei $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ die beiden Spinzustände des Elektrons und $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ die beiden Spinzustände des Positrons darstellen. Dabei genügen die Elektronen der Impulsraum-Dirac-Gleichung mit negativem Vorzeichen:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\, u = 0$$

während die Positronen die Impulsraum-Dirac-Gleichung mit positivem Vorzeichen erfüllen:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)\, v = 0$$

Adjungierter Spinor und bilineare Kovarianten

S. G245f.

Aussage: Ein Spinor transformiert sich nicht wie ein Vierervektor, sondern genügt folgender Transformationsregel

$$\psi \to \psi' = S\psi$$

mit

$$S = a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1 \qquad \text{mit} \qquad a_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma\pm 1)} \qquad \text{und} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Versucht man mit ψ eine skalare Größe zu konstruieren, stellt sich heraus, daß $\psi^\dagger\psi$ *kein* Skalar ist. Definiert man jedoch

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \qquad \text{mit} \qquad \gamma^0 := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

so ist $\bar{\psi}\psi$ ein *Skalar*. Allgemein ergeben sich folgende 16 *bilineare Kovarianten* (i und j laufen von 1 bis 4):

$\bar{\psi}\psi$	Skalar	1 Komponente
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Pseudo-Skalar	1 Komponente
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Vektor	4 Komponenten
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	axialer Vektor	4 Komponenten
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	antisymmetrischer Tensor	6 Komponenten

mit

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu$$

Das Photon in der Quantenelektrodynamik

S. G247ff.

Aussage: Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen für ein Vierer-Potential

$$A^\mu := (\varphi, \vec{A})$$

lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \qquad (\star)$$

Allerdings ist A^μ durch $(\star)$ nicht eindeutig bestimmt, sondern besitzt Eichfreiheit:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \lambda(t, \vec{x}) \text{ beliebig}$$

Daher können wir eine zusätzliche Forderung an A^μ stellen, z.B. die *Lorentz-Konvention*

$$\partial_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} 0$$

was zu

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

führt. Leider ist A^μ damit immer noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann nun mit der Eichfreiheit leben oder zusätzliche Einschränkungen fordern, die allerdings die *Lorentz-Kovarianz* der Theorie verdirbt, z.B. (*Coulomb-Eichung*)

$$A^0 \stackrel{!}{=} 0$$

In der QED ist nun A^μ die Wellenfunktion des Photons, welches daher mit $J^\nu = 0$

$$\Box A^\mu = 0$$

erfüllt. Als Lösungen setzt man *ebene Wellen* mit dem Impuls $p = (E/c, \vec{p})$ an:

$$A^\mu(x) = a \; e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \; \epsilon^\mu(p)$$

wobei ϵ^μ der *Polarisationsvektor* des Photons und a ein Normierungsfaktor ist. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$p^\mu p_\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = |\vec{p}|c$$

und die Lorentz-Konvention verlangt

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0$$

und daher mit der Coulomb-Eichung

$$\epsilon^0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

d.h. der Polarisationsvektor $\vec{\epsilon}$ steht senkrecht zur Bewegungsrichtung des Photons: das Photon ist *transversal polarisiert* (man nennt daher die Coulomb-Eichung auch transversale Eichung). Zeigt $\vec{p}$ in z-Richtung können wir z.B. wählen:

$$\epsilon_{(1)} = (1, 0, 0) \qquad \text{und} \qquad \epsilon_{(2)} = (0, 1, 0)$$

Allgemein gilt, daß ein masseloses Teilchen *zwei* und ein massives *drei* (bzw. $2s + 1$) Spinorientierungen besitzt.

Feynman-Regeln für die QED

S. G252ff.

Aussage: Berechnung der Amplitude $\mathcal{M}$ eines bestimmten Feynman-Diagramms (dabei geht man *rückwärts entlang der Fermionlinien*): das Ergebnis ist $-i\mathcal{M}$

1. *Schreibweise:*
   - ein- und auslaufende Viererimpulse: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und Spins: $s_1, s_2, \ldots, s_n$
   - interne Impulse: $q_1, q_2, \ldots$
2. *Externe Linien:*

	einlaufend	auslaufend
Elektron:	u	$\bar{u}$
Positron:	$\bar{v}$	v
Photon:	ϵ^μ	$\epsilon^{\mu *}$

3. *Vertexfaktoren:* für jeden *Vertex*

$$-ig_e\gamma^\mu \qquad \text{mit} \qquad g_e := e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$$

4. *Propagator:* für jede *interne Linie*

$$\text{Elektron/Positron:} \quad \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2} \qquad \text{Photon:} \quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

5. *Energie- und Impulserhaltung:* Für jeden *Vertex*

$$(2\pi)^4 \; \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

   wobei die k's für auslaufende Linien *negativ* sind

6. *Integration über interne Impulse:* Für jede *interne Linie*

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

   und integriere über alle internen Impulse

7. *Streichen der Deltafunktion:*

$$(2\pi)^4 \; \delta^4(p_1 + p_2 + \ldots - p_n)$$

Mehrere Feynman-Diagramme mit gleichem Anfangs- & Endzustand sind aufzusummieren, wobei folgendes zu beachten ist:

8. *Antisymmetrisierung:* Minuszeichen zwischen Diagrammen, die sich durch Austausch
   - zweier ein- oder auslaufender Elektronen (Positronen)
   - eines einlaufenden Elektrons mit einem auslaufenden Positron

   unterscheiden.

Casimirs Trick

S. G259ff.

Aussage: In der Amplitude der meisten Streuprozesse treten Größen der Form

$$G \equiv [\bar{u}(a)\ \Gamma_1\ u(b)]\ [\bar{u}(a)\ \Gamma_2\ u(b)]^*$$

Wertet man den komplex konjugierten Faktor aus, so erhält man

$$[\bar{u}(a)\ \Gamma_2\ u(b)]^* = [\bar{u}(b)\ \bar{\Gamma}_2\ u(a)] \qquad \text{mit} \qquad \bar{\Gamma}_2 := \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0$$

(Γ_2 konjugiert, $a \leftrightarrow b$) Bei einem Streuexperiment sind normalerweise die Spinorientierungen der Teilchen willkürlich verteilt. Daher muß man das *Mittel* über aller Spins im *Anfangs*- und die *Summe* aller Spins im *End*zustand bilden. Wie sich herausstellen wird (*Casimirs Trick*), muß man dies jedoch nicht explizit ausführen. Mit Hilfe der *Vollständigkeitsrelation für Spinoren*

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\ \bar{u}^{(s)} = (\not{p} + mc)$$

erhält man führ die Summe über die Spins von Teilchen b:

$$\sum_{b\ Spins} G = \bar{u}(a)\ \Gamma_1 \left\{ u^{(s_b)}(p_b)\ \bar{u}^{(s_b)}(p_b) \right\} \bar{\Gamma}_2\ u(a) = \bar{u}(a)\ Q\ u(a)$$

mit

$$Q := \Gamma_1\ (\not{p}_b + m_b c)\ \bar{\Gamma}_2$$

Nun können wir in gleicher Weise über die Spins von Teilchen a summieren und erhalten in Matrizenschreibweise:

$$\sum_{a\ Spins} \sum_{b\ Spins} G = Q_{ij}\ (\not{p}_a + m_a c)_{ji} = \mathrm{Sp}\Big(Q(\not{p}_a + m_a c)\Big)$$

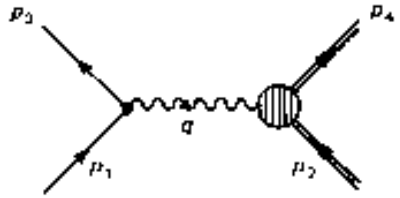
D.h. wir können die Summation über Produkte von Spinoren auf Matrixmultiplikation und Spurbildung reduzieren, was eine große Vereinfachung darstellt:

$$\sum_{alle\ Spins} [\bar{u}(a)\ \Gamma_1\ u(b)]\ [\bar{u}(a)\ \Gamma_2\ u(b)]^* = \mathrm{Sp}\Big(\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\ \bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)\Big)$$

Sinn der Einführung von Formfaktoren

S. G290ff.

Aussage: Kennt man die Wechselwirkung von Teilchen an einem Vertex nicht, wie z.B. bei der gezeigten Elektron-Proton-Streuung die Kopplung des Photons an das Proton,



so kennzeichnet man diese Unkenntnis durch das Einzeichnen einer *Blase* in das Feynman-Diagramm. Die restlichen Teile des Diagramms sind bekannt, weshalb wir schreiben können:

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{g_e^2}{q^4} L^{\mu\nu}_{\text{Elektron}} K_{\mu\nu\ \text{Proton}}$$

wobei $K_{\mu\nu\ \text{Proton}}$ die unbekannte Größe repräsentiert. Allerdings muß es ein *Tensor zweiter Stufe* sein, der abhängig ist von p_2, p_4 und q, die allerdings über $q = p_4 - p_2$ zusammenhängen. Die allgemeinste Form, in der wir einen Tensor zweiter Stufe aus den beiden Variabeln q und $p := p_2$ konstruieren können, ist:

$$K^{\mu\nu}_{\text{Proton}} = -K_1 g^{\mu\nu} + \frac{K_2}{(Mc)^2} p^\mu p^\nu + \frac{K_4}{(Mc)^2} q^\mu q^\nu + \frac{K_5}{(Mc)^2}(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$$

wobei K_1, K_2, K_4 und K_5 zu bestimmende Konstanten sind. Man kann zeigen, daß sie nicht unabhängig sind, und dadurch ihre Zahl reduzieren:

$$K^{\mu\nu}_{\text{Proton}} = K_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) + \frac{K_2}{(Mc)^2} \left(p^\mu + \frac{1}{2} q^\mu\right) \left(p^\nu + \frac{1}{2} q^\nu\right)$$

Das heißt wir stecken unsere Unkenntnis über den Vertex in zwei Konstanten, die wir als „*Formfaktoren*“ bezeichen und die wir nur *experimentell* bestimmen können.

Bedeutung des Bjorken-Skalenverhaltens und der Callan-Gross-Beziehung

S. G296f.

Aussage: Das *Bjorken-Skalenverhalten*, d.h. die Strukturfunktionen der inelastischen Elektron-Proton-Streuung hängen bei sehr hohen Energien (tiefinelastischen Streuung) nur noch von

$$x := -\frac{q^2}{2q \cdot p}$$

ab und (praktisch) nicht mehr von q^2, basiert auf der Annahme, daß das Proton *aus Partonen aufgebaut* ist. Die *Callan-Gross-Beziehung*

$$2x\ F_1(x) = F_2(x)$$

ergibt sich unter der Annahme, daß die Partonen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen sind. Daher war die Bestätigung beider Voraussagen *der erste überzeugende Beweis für die Existenz von Quarks*: Sie ergeben sich aus der Hypothese, daß bei hohen Energien, daß Photon *mit einem einzelnen, im wesentlichen freien Quark* wechselwirkt.

Bedeutung der Impulsverteilung in Nukleonen

S. G300ff.

Aussage: Aus den Messungen der Strukturfunktionen der tiefinelastischen Elektron-Proton-Streuung kann man schließen, daß der von *geladenen* Partonen getragene Impulsanteil etwa

$$54\%$$

des Gesamtimpulses beträgt. Das bedeutet, daß fast die Hälfte des Impulses *ungeladenen* Teilchen zugeschrieben werden muß. Dies ist ein deutlicher Hinweis auf die Existenz von *Gluonen*, die ja ungeladene Teilchen sind.

Änderungen in den Feynman-Regeln beim Übergang von QED zu QCD

S. G307ff.

Aussage: Folgende grundlegenden Änderungen muß man bei der Formulierung der Feynman-Regeln für die QCD gegenüber den Regeln in der QED beachten:

1. Quarks tragen Farbe: zusätzlich zu den Spinoren (Quarks haben Spin $\frac{1}{2}$) benötigt man drei-elementige Spaltenvektoren, die die Farbe des Quarks angeben:

$$\text{rot:}\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{blau:}\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{grün:}\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Es gibt 8 Gluonen: Um den Farbzustand eines Gluons zu beschreiben benötigt man zusätzlich acht-elementige Spaltenvektoren:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{usw.}$$

3. Quark-Gluon-Vertizes: Hier treten zusätzlich die 3×3-λ-*Matrizen von Gell-Mann* auf, die der Farbladung von Quarks und Gluonen Rechnung tragen. Dies führt zu einem zusaätzlichen *Farbfaktor* f bei der Berechnung von $\mathcal{M}$.

4. Drei- & Vier-Gluon-Vertizes: Wegen der Möglichkeit zu Selbstkopplungen von Gluonen muß man diese Vertizes mit berücksichtigen.

Wie erkennt man an den Feynman-Regeln, daß die schwache WW die Parität verletzt?

S. G332f.

Aussage: Bei der schwachen Kopplung des W-Bosons an Leptonen tritt am Vertex der Faktor

$$\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$

auf. Dabei ist γ^μ ein *Vektor* und $\gamma^\mu\gamma^5$ ein *axialer Vektor*. Es wird also ein Axial-Vektor zu einem Vektor addiert, was nicht erlaubt ist. Daher muß die schwache Wechselwirkung die Parität verletzen, denn Vektor und Axialvektor definieren sich über die Paritätsoperation P:

$$\begin{array}{rc} \text{Vektor:} & P(v) = -v \\ \text{Axial-Vektor:} & P(a) = a \end{array}$$

Definition: **Fermi-Kopplungskonstante**

S. G338f.

Aussage: In Fermis usprünglicher Theorie des Beta-Zerfalls behandelte er den $e\nu_\mu\bar{\nu}_e\mu$-Vertex als Punktwechselwirkung der vier Teilchen. Da das W-Boson so schwer ist, war das keine schlechte Näherung. Daher drückt man Formeln der schwachen Wechselwirkung traditionell in Abhängigkeit der *Fermi-Kopplungskonstante*

$$G_F := \frac{\sqrt{2}}{8}(\hbar c)^3 \left(\frac{g_w}{M_W c^2}\right)^2$$

aus.

Werte der Kopplungskonstanten

S. G339

Aussage: Folgende Werte geben die Größenordnungen der Kopplungskonstanten an:

- schwache WW: aus der Messung der Fermikonstanten im Beta-Zerfall erhält man:

$$g_w \approx 0.66 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} = \frac{1}{29}$$

- elektromagnetische WW:

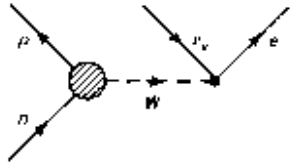
$$g_e \approx 0.30 \qquad \Leftarrow \qquad \alpha = \frac{g_e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Die starke Kopplungskonstante hängt zu sehr von q^2 ab, als daß ein Vergleich sinnvoll wäre.
Obwohl die schwache Kopplungskonstante etwa einen *Faktor 5 größer* ist als die elektromagnetische, ist die schwache Wechselwirkung viel schwächer als die elektromagnetische: Das liegt daran, daß *bei niedrigen Energien* und damit Impulsüberträgen, der Nenner im schwachen Propagator ($q^2 - M_W^2 c^2$) sehr groß wird und damit die *schwache WW vernachlässigbar* gegenüber der elektromagnetischen. Bei LEP, wo man mit Energien in der Größenordnung von M_Z und M_W arbeitet übertrifft die schwache WW die elektromagnetische.

Conserved Vector Current

S. G344f.

Aussage: Betrachtet man die Kopplung des W an Proton und Neutron, z.B. im Neutron-Zerfall,



so sieht das W-Boson das Neutron nicht rein als Punktteilchen an - dann wäre der Vertexfaktor $(1-\gamma^5)$ -, sondern sieht auch starke Wechselwirkungen aufgrund der Gluonen oder Quark-Antiquark-Paare im Innern. Daher nimmt man folgende Ersetzung im n → p + W-Vertexfaktor vor:

$$(1-\gamma^5) \to (c_V - c_A\gamma^5)$$

Messungen ergeben:

$$c_V = 1.000 \pm 0.003 \qquad \text{und} \qquad c_A = 1.26 \pm 0.02$$

d.h. die *vektorielle* schwache Ladung wird durch starke Wechselwirkungen *nicht verändert*, weshalb man von *Erhaltung des Vektorstroms* (*Conserved Vector Current*) spricht, wohingegen der *axiale* Teil der schwachen Ladung *leichte Modifikationen* erfährt, was man als *partielle Erhaltung des Axialstroms* (*Partially Conserved Axial Current*) bezeichnet.

Vertex-Faktoren der schwachen Wechselwirkung

S. G356

Aussage: Die *Vertex-Faktoren der schwachen Wechselwirkung* ergeben sich zu:

- $W^{\pm}$-Vertexfaktor:

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$

- Z^0-Vertexfaktor:

$$\frac{-ig_z}{2}\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma^5)$$

wobei die Koeffizienten c_V und c_A vom beteiligten Quark oder Lepton abhängen:

Fermion	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\sin\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$

wobei $\theta_w \approx 29^o$ den Weinberg-Winkel darstellt. Die geladene und die neutrale schwache Kopplungskonstante hängen dabei über den Weinberg-Winkel mit der elektromagnetischen Kopplungskonstante zusammen:

$$g_w = \frac{g_e}{\sin\theta_w} \qquad \text{und} \qquad g_z = \frac{g_e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}$$

Elektroschwache Vereinheitlichung der Vertexfaktoren

S. G363ff

Aussage: Der geladene schwache Strom und der elektromagnetische Strom ergeben sich (im leptonischen Fall) wie folgt:

$$j_\mu^- = \bar\nu\ \gamma_\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\ e \qquad \text{und} \qquad j_\mu^{em} = -\bar e\ \gamma_\mu\ e$$

wobei ν und e für die Teilchen-Spinoren stehen. Nun definiert man „*chiriale Spinoren*“:

Teilchen	Antiteilchen
$u_L := \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u$	$v_L := \frac{1}{2}(1+\gamma^5)v$
$u_R := \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u$	$v_R := \frac{1}{2}(1-\gamma^5)v$
$\bar u_L := \bar u\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$	$\bar v_L := \bar v\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$
$\bar u_R := \bar u\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$	$\bar v_R := \bar v\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$

Begründung: Es läst sich zeigen, daß für $m = 0$:

$$\gamma^5 u(p) = (\hat p\cdot\vec\Sigma)\ u(p) \qquad \text{und} \qquad \gamma^5 v(p) = -(\hat p\cdot\vec\Sigma)\ v(p)$$

wobei $\frac{\hbar}{2}\Sigma$ die Spinmatrix eines Dirac-Teilchens darstellt und daher $\hat p\cdot\vec\Sigma$ die Helizität ±1 des Teilchens angibt. Dies aber bedeutet:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\ u(p) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } u(p) \text{ Helizität } +1 \text{ hat} \\ -1 & \text{wenn } u(p) \text{ Helizität } -1 \text{ hat} \end{cases}$$

d.h. $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ pickt die Helizitätskomponente -1 von $u(p)$ heraus und die obigen Definitionen machen Sinn. Nun kommen wir zur *Vereinheitlichung*: Man kann nachrechnen, daß

$$\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)$$

und der geladene schwache Strom wird zu

$$j_\mu^- = \bar\nu_L\ \gamma_\mu\ e_L$$

Mit Hilfe der Identität

$$u = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)u + \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u = u_L + u_R$$

läßt sich auch der elektromagnetische Strom in diese Form bringen:

$$j_\mu^{em} = -(\bar e_L + \bar e_R)\ \gamma_\mu\ (e_L + e_R) = -\bar e_L\ \gamma_\mu\ \bar e_R - e_L\ \gamma_\mu\ e_R$$

Man sieht deutlich, daß der schwache Strom nur an linkshändige Zustände koppelt, während der elektromagnetische an beide Arten koppelt.

Elektroschwache Vereinheitlichung zur $\mathbf{SU(2)_L \otimes U(1)_Y}$

S. G367ff.

Aussage: Faßt man die geladenen schwachen Ströme

$$j_\mu^- = \bar{\nu}_L \, \gamma_\mu \, e_L \qquad \text{und} \qquad j_\mu^+ = \bar{e}_L \, \gamma_\mu \, \nu_L$$

zu einem Dublett zusammen

$$j_\mu^\pm = \bar{\chi}_L \, \gamma_\mu \tau^\pm \, \chi_L \qquad \text{mit} \qquad \chi_L := \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \tau^+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so erinnert das stark an den *Isospin* und man konstruiert eine *dritte Stromkomponente*

$$j_\mu^3 := \bar{\chi}_L \, \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^3 \, \chi_L \qquad \text{mit} \qquad \tau^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit sind allerdings nur Kopplungen an *link*shändige Teilchen beschrieben, während die neutrale schwache Wechselwirkung auch eine *recht*shändige Komponente enthält. Analog der *Gell-Mann-Nishijima-Formel*

$$Q = I^3 + \frac{1}{2} Y \qquad \Rightarrow \qquad Y = 2Q - 2I^3$$

konstruieren wir daher einen „*schwachen Hyperladungsstrom*“

$$j_\mu^Y := 2 j_\mu^{em} - 2 j_\mu^3 = -2 \bar{e}_R \, \gamma_\mu \, e_R - \bar{e}_L \, \gamma_\mu \, \bar{e}_L - \bar{\nu}_L \, \gamma_\mu \, \nu_R$$

der an rechts- wie linkshändige Teilchen koppelt und wir haben

$$\underbrace{\vec{j}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \, \gamma_\mu \vec{\tau} \, \chi_L}_{SU(2)_L} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{j_\mu^Y = 2 j_\mu^{em} - 2 j_\mu^3}_{U(1)_Y}$$

die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Symmetrie der elektroschwachen Vereinheitlichung.

Elektroschwache Mischung

S. G369ff.

Aussage: Die schwachen Isospinströme bzw. der schwache Hyperladungsstrom

$$\vec{j}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \, \gamma_\mu \vec{\tau} \, \chi_L \qquad \text{bzw.} \qquad j_\mu^Y = 2 j_\mu^{em} - 2 j_\mu^3$$

koppeln an mit der Stärke g_w an ein schwaches *Isotriplett* intermediärer Vektorbosonen $\vec{W}$ bzw. mit Stärke $\frac{g'}{2}$ an ein *Isosingulett* eines intermediären Vektorbosons B:

$$-i \left[g_w \vec{j}_\mu \cdot \vec{W}^\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu \right]$$

dabei ist

$$j_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (j_\mu^1 \mp i j_\mu^2) \qquad \text{und} \qquad W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$$

Nun ist jedoch in der GWS-Theorie die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Symmetrie gebrochen, d.h. die neutralen Zustände W^3 und B mischen: (vgl. Cabbibo-Theorie)

$$\begin{array}{rrcl} \text{Photon:} & A_\mu & := & B_\mu \cos\theta_w + W^3 \sin\theta_w \\ Z^0: & Z_\mu & := & -B_\mu \sin\theta_w + W^3 \cos\theta_w \end{array}$$

wobei der Mischungswinkel θ_w den Namen *Weinbergwinkel* erhält. Daraus ergibt sich dann z.B. die elektromagnetischen Kopplung als

$$-i g_e j_\mu^{em} A^\mu$$

Außerdem führt die Forderung nach Vereinbarkeit von QED und elektroschwacher Theorie zu folgender Identität:

$$g_w \sin\theta_w = g' \cos\theta_w = g_e$$

Klassische und relativistische Lagrange-Formulierung der Mechanik

S. G380

Aussage: In *Lagrange-Formulierung der klassischen Mechanik* definiert man eine *Lagrange-Funktion*

$$L := T - U$$

wobei T die kinetische und U die potentielle Energie darstellen. Dann lauten die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \text{mit} \qquad (i = 1,2,3)$$

Die Bewegungsgleichungen in der Newtonschen Formulierung ergeben sich daraus mit $\vec{x} = q$ und $v = \vec{x} = \dot{q}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial T}{\partial v_i} = m v_i \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \end{aligned}$$

In der *relativistischen Feldtheorie* lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$

wobei der Index μ über Raum- und Zeitkoordinaten summiert und $\mathcal{L}$ die Lagrange*dichte* darstellt.

Klein-Gordon-Lagrange-Funktion

S. G381

Aussage: Die *Klein-Gordon-Lagrange-Funktion* beschreibt die Energiedichte eines freien *skalaren Feldes* φ (Spin 0) der Masse m:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi^2$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung dieser Lagrange-Funktion ist die *Klein-Gordon-Gleichung*, die ein freies Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi^2 = 0$$

Dirac-Lagrange-Funktion

S. G381f.

Aussage: Die *Dirac-Lagrange-Funktion* beschreibt die Energiedichte eines freien *Spinorfeldes* ψ (Spin $\frac{1}{2}$) der Masse m:

$$\mathcal{L} = i\hbar c\, \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi}\psi$$

Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung auf $\bar{\psi}$ ergibt die *Dirac-Gleichung*, die ein freies Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m beschreibt:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

Entsprechend erhält man durch anwenden auf ψ die Adjungierte der *Dirac-Gleichung*

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0$$

Proca-Lagrange-Funktion

S. G382

Aussage: Die *Proca-Lagrange-Funktion* beschreibt die Energiedichte eines freien *Vektorfeldes* A^μ (Spin 1) mit Masse m:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Mit Hilfe der Abkürzung

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

schreibt sich die Lagrangedichte als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

und es ergeben sich folgende Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$$

Für ein *masseloses* Vektorfeld erhält man die die *Maxwell-Gleichungen* für das Vakuum:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Maxwell-Lagrange-Funktion

S. G383

Aussage: Die *Maxwell-Lagrange-Funktion* beschreibt die Energiedichte eines *masselosen Vektorfeldes* A^μ, das einer *Quelle* J^μ entstammt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu$$

Daraus ergeben sich folgende Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

die nichts anderes als die *Tensorform der Maxwell-Gleichungen* darstellen. Hieraus folgt unter anderem die *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

***Definition:* Globale und lokale Eichtransformation**

S. G384

Aussage: Unter einer *globalen Eichtransformation* versteht man folgende Umformung

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \text{mit} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

d.h. θ ist einfach eine *reele Zahl*. Im Gegensatz dazu ist θ bei einer *lokalen Eichtransformation*

$$\psi \to e^{i\theta(x^\mu)}\psi \qquad \text{mit} \qquad \theta = \theta(x^\mu) \in \mathbb{R}$$

eine *reele Funktion* des Ortes.

U(1)-Eichinvarianz

S. G384ff.

Aussage: Die *Dirac-Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L} = i\hbar c\ \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

ist *invariant* unter globalen Eichtransformationen $\psi \to e^{i\theta}\psi$, aber *nicht invariant* unter lokalen Eichtransformationen $\psi \to e^{i\theta(x)}\psi$, da sich hier ein zusätzlicher Term

$$(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \qquad \text{mit} \qquad \lambda(x) := -\frac{\hbar c}{q}\theta(x)$$

ergibt. Lokale Eichinvarianz für die Dirac-Lagrange-Funktion läßt sich daher herstellen, indem man diesen Term durch Hinzufügen eines weitern Terms kompensiert:

$$\mathcal{L} = i\hbar c\ \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

wobei sich das *Eichfeld* A^μ lokal wie folgt transformiert:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda \qquad (\star)$$

Zur vollständigen Beschreibung benötigt man jetzt jedoch noch einen Term der das freie Eichfeld beschreibt. Die entsprechende Lagrange-Funktion ist die *Proca-Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Allerdings ist nur der erste Term invariant unter $(\star)$, der zweite nicht. Lokale Eichinvarianz läßt sich daher nur erhalten, wenn man fordert, daß das *Eichfeld masselos* ist. Definiert man die Stromdichte

$$J^\mu := c\ q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$$

so ergibt sich daher als *lokal eichinvariante Lagrangedichte*

$$\mathcal{L} = i\hbar c \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu$$

wobei die letzten beiden Terme die *Maxwell-Lagrange-Funktion* darstellen. Insgesamt tritt der Unterschied zwischen globaler und lokaler Eichtransformation bei der Berechnung der *Ableitung* auf:

$$\text{(global)} \qquad \partial_\mu\psi \to e^{-\frac{iq\lambda}{\hbar c}}\left[\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}(\partial_\mu\lambda)\right]\psi \qquad \text{(lokal)}$$

D.h. man kann von einer *global invarianten* Lagrange-Funktion zu einer *lokal invarianten* Lagrange-Funktion übergehen, indem man *jede partielle* Ableitung durch die *kovariante Ableitung*

$$\mathcal{D}_\mu := \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A^\mu$$

ersetzt. Man nennt diese Art der Symmetrie U(1)-*Eichinvarianz*, da die Gruppe aller Matrizen

$$U = e^{i\theta} \qquad \Rightarrow \qquad U^\dagger U = 1$$

die U(1)-Gruppe ist und wir ja mit $\psi \to U\psi$ geeicht haben.

U(2)-Eichinvarianz

S. G386ff.

Aussage: Die *Dirac-Lagrange-Funktion* für *zwei* freie Spin-$\frac{1}{2}$-Felder ψ_1 und ψ_2 lautet

$$\mathcal{L} = i\hbar c\, \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - Mc^2 \bar{\psi}\psi \qquad (1)$$

mit

$$\psi := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

Sie ist *invariant unter globalen Eichtransformationen* $\psi \to U$ mit $U^\dagger U = 1$. Die unitäre 2×2-Matrix U läßt sich allgemein umschreiben als

$$\underbrace{U}_{U(2)} = e^{iH} = \underbrace{e^{i\theta}\, e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}}}_{U(1)\otimes SU(2)} \qquad \text{mit} \qquad H := \theta 1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{a}$$

wobei H eine beliebige hermitesche Matrix, σ_i die Pauli-Matrizen und θ, a_1, a_2, a_3 reele Zahlen darstellen. Die U(1)-Eichinvarianz des Faktors $e^{i\theta}$ ist bekannt, so daß wir uns darauf beschränken können, die *globale* SU(2)-Eichinvarianz von $e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}}$ in eine *lokale*

$$\psi \to S(x)\,\psi \qquad \text{mit} \qquad S(x) := e^{-\frac{ig\vec{\sigma}\cdot\vec{\lambda}(x)}{\hbar c}} \qquad \text{und} \qquad \lambda(x) := -\frac{\hbar c}{q}\vec{a}(x)$$

überzuführen (*Yang-Mills-Theorie*). Das erreicht man, indem man den *drei Eichfeldern* $\vec{A}_\mu$ in der kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu := \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu$ eine Transformationsregel zuweist, so daß $\mathcal{D}_\mu\psi \to S(\mathcal{D}_\mu\psi)$. Nach einiger Rechnung erhält man diese näherungsweise als

$$\vec{A}_\mu \to \vec{A}'_\mu \simeq \vec{A}_\mu + \partial_\mu\lambda + 2\frac{q}{\hbar c}(\vec{\lambda}\times\vec{A}_\mu) \qquad (2)$$

Ersetzt man also in der Lagrange-Funktion (1) die partielle durch die kovariante Ableitung ergibt sich

$$\mathcal{L} = i\hbar c\, \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - Mc^2\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\sigma}\psi\cdot\vec{A}_\mu$$

wobei der letzte Term den Zusatzterm $\partial_\mu S$ bei der lokalen Eichung kompensiert. Zur vollständigen Beschreibung benötigt man jetzt jedoch noch einen Term der die freien Eichfelder beschreibt $\vec{A}_\mu$. Die entsprechende Lagrange-Funktion ist die *Proca-Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 \vec{A}^\nu\cdot\vec{A}_\nu$$

Allerdings ist nur der erste Term invariant unter (2), wenn man

$$\vec{F}^{\mu\nu} := \partial^\mu\vec{A}^\nu - \partial^\nu\vec{A}^\mu - 2\frac{q}{\hbar c}(\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu) \qquad (3)$$

definiert, der zweite nicht. Lokale Eichinvarianz läßt sich daher nur erhalten, wenn man fordert, daß die *Eichfelder masselos* sind. Definiert man die Stromdichte $\vec{J}^\mu := c\,q\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\sigma}\psi$, so ergibt sich daher als *lokal eichinvariante Lagrangedichte*

$$\mathcal{L} = i\hbar c\cdot\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\vec{J}^\mu\vec{A}_\mu$$

wobei die letzten beiden Terme die *Maxwell-Lagrange-Funktion* darstellen. Die Schwierigkeiten bei der Formulierung der Yang-Mills-Theorie, die sich in (2) und (3) äußern, basieren auf der Tatsache, daß die 2×2-Matrizen des SU(2) nicht kommutieren - im Gegensatz zu den 1×1-Matrizen der U(1).

U(3)-Eichinvarianz

S. G391ff.

Aussage: Die *Dirac-Lagrange-Funktion* für ein Quark eines bestimmten Flavours lautets

$$\mathcal{L} = i\hbar c\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - Mc^2\bar\psi\psi \qquad (\star)$$

mit

$$\psi := \begin{pmatrix}\psi_r\\ \psi_b\\ \psi_g\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \bar\psi := \left(\bar\psi_r, \bar\psi_b, \bar\psi_g\right)$$

wobei $\psi_r, \psi_b, \ldots$ vierkomponentige Dirac-Spinoren darstellen. Sie ist *invariant unter globalen Eichtransformationen* $\psi \to U$ mit $U^\dagger U = 1$. Die unitäre 3×3-Matrix U läßt sich allgemein umschreiben als

$$\underbrace{U}_{U(3)} = e^{iH} = \underbrace{e^{i\theta}\,\underbrace{e^{i\vec\lambda\cdot\vec a}}_{SU(3)}}_{U(1)\otimes SU(3)} \qquad \text{mit} \qquad H := \theta 1 + \vec\lambda\cdot\vec a$$

wobei H eine beliebige hermitesche Matrix, $\lambda_1, \ldots \lambda_8$ die Gell-Mann-Matrizen und $\theta, a_1, \ldots, a_8$ reele Zahlen darstellen. Die U(1)-Eichinvarianz des Faktors $e^{i\theta}$ ist bekannt, so daß wir uns darauf beschränken können, die *globale* SU(3)-Eichinvarianz von $e^{i\vec\lambda\cdot\vec a}$ in eine *lokale*

$$\psi \to S(x)\,\psi \qquad \text{mit} \qquad S(x) := e^{-\frac{ig\vec\lambda\cdot\vec\varphi(x)}{\hbar c}} \qquad \text{und} \qquad \varphi(x) := -\frac{\hbar c}{q}\vec a(x)$$

überzuführen (QCD). Das erreicht man, indem man den *acht Eichfeldern* $\vec A_\mu$ in der kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu := \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec\lambda\cdot\vec A_\mu$ eine Transformationsregel zuweist, so daß $\mathcal{D}_\mu\psi \to S(\mathcal{D}_\mu\psi)$. Nach einiger Rechnung erhält man diese näherungsweise als

$$\vec A_\mu \to \vec A'_\mu \simeq \vec A_\mu + \partial_\mu\varphi + 2\frac{q}{\hbar c}(\vec\varphi\times\vec A_\mu) \qquad \text{mit} \qquad (\vec C\times\vec D)_i := \sum_{j,k=1}^{8} f_{ijk}B_jC_k$$

wobei die f_{ijk} die Strukturkonstanten der SU(3) sind - analog zu den ϵ_{ijk} der SU(2). Ersetzt man also in der Lagrange-Funktion ($\star$) die partielle durch die kovariante Ableitung ergibt sich

$$\mathcal{L} = i\hbar c\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - Mc^2\bar\psi\psi - q\bar\psi\gamma^\mu\vec\lambda\psi\cdot\vec A_\mu$$

wobei der letzte Term den Zusatzterm $\partial_\mu S$ bei der lokalen Eichung kompensiert. Zur vollständigen Beschreibung benötigt man jetzt jedoch noch einen Term der die freien Eichfelder beschreibt $\vec A_\mu$. Die entsprechende Lagrange-Funktion ist die *Proca-Lagrange-Funktion*. Mit Hilfe der Definitionen $\vec F^{\mu\nu} := \partial^\mu\vec A^\nu - \partial^\nu\vec A^\mu - 2\frac{q}{\hbar c}(\vec A^\mu\times\vec A^\nu)$ und $\vec J^\mu := c\,q\bar\psi\gamma^\mu\vec\lambda\psi$ ergibt sich daraus in üblicher Weise eine *lokal eichinvariante Lagrangedichte* mit acht *masselosen* Eichfeldern $\vec A_\mu$

$$\mathcal{L} = i\hbar c\cdot\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar\psi\psi - \frac{1}{16\pi}\vec F^{\mu\nu}\cdot\vec F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\vec J^\mu\vec A_\mu$$

wobei die letzten beiden Terme die *Maxwell-Lagrange-Funktion* darstellen. Dies ist die *Lagrange-Funktion der Chromodynamik*.

Feynman-Regeln aus den Eichtheorien

S. G394ff.

Aussage: Die Lagrangedichte besteht aus zwei Teilen:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{frei}}}_{\Rightarrow\text{Propagator}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{int}}}_{\Rightarrow\text{Vertexfaktoren}}$$

der *freien* Lagrange-Funktion und den *Wechselwirkungs*termen. Sie bestimmen in den Feynman-Regeln den Propagator bzw. die Vertexfaktoren. Mit Hilfe der Vorschrift $i\hbar\partial_\mu \to p_\mu$ erhält man die drei freien Feldgleichungen zu

$$\begin{aligned}
\left[p^2 - (mc)^2\right]\,\varphi &= 0 && \text{(Klein-Gordon: Spin 0)}\\
\left[\not p - (mc)\right]\,\varphi &= 0 && \text{(Dirac: Spin } \tfrac{1}{2}\text{)}\\
\left[-\left(p^2 - (mc)^2\right)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\right]\,A^\nu &= 0 && \text{(Proca: Spin 1)}
\end{aligned}$$

Der Propagator ist nun einfach *i-mal das Inverse* des Faktors in eckigen Klammern:

$$\begin{aligned}
\text{Spin-0-Propagator:} &\quad \frac{i}{p^2-(mc)^2}\\
\text{Spin-}\tfrac{1}{2}\text{-Propagator:} &\quad \frac{i}{\not p - mc} = i\frac{p^2+(mc)^2}{p^2-(mc)^2}\\
\text{Spin-1-Propagator:} &\quad \frac{-i}{p^2-(mc)^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(mc)^2}\right]
\end{aligned}$$

Der Spin-1-Propagator macht keinen Sinn für ein masseloses Austauschboson ($m \to 0$). Daher müssen wir auf die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$$

zurückgehen. Mit Hilfe der Lorentz-Konvention $\partial_\mu A^\mu = 0$ wird daraus

$$\partial^2 A^\nu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-p^2 g_{\mu\nu})\,A^\nu = 0$$

und somit:

$$\text{Masseloser Spin-1-Propagator:} \quad -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$$

Die Vertexfaktoren ergeben sich aus den *Wechselwirkungstermen* im Impulsraum durch *Wegstreichen der Feldvariaben*:

$$\begin{aligned}
QED: &\qquad i\mathcal{L}_{\text{int}} = -iq\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu &&\Rightarrow &&-i\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}q\gamma^\mu = ig_e\gamma^\mu\\
QCD: &\qquad i\mathcal{L}_{\text{int}} = -iq\bar\psi\gamma^\mu\vec\lambda\psi\cdot\vec A_\mu &&\Rightarrow &&-i\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}q\gamma^\mu\vec\lambda = i\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\lambda
\end{aligned}$$

(die starke Ladung wird traditionell mit einem Faktor 2 definiert) Für Gluon-Gluon-Wechselwirkungen erhält man weitere Vertexfaktoren.

Beispiel für eine diskrete und eine kontinuierliche Symmetriebrechung

S. G399f.

Aussage: Ein Beispiel für *spontane Symmetriebrechung* mit *diskreter* Symmetrie ist ein kurzes Plastik-Lineal, das ein beiden Enden zusamengedrückt wird: Das Lineal beugt sich in die eine oder andere Richtung.
Ein ähnliches Beispiel mit *kontinuierlicher* Symmetrie erhält man, wenn man das Lineal durch eine Plastikstange (z.B. eine Stricknadel) ersetzt: Nun kann sich die Stange in jede Richtung biegen.

Spontante Symmetriebrechung: Goldstone-Bosonen

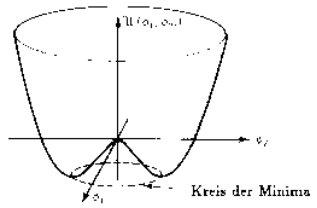
S. G399ff.

Aussage: Betrachten wir als Beispiel folgende Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)(\partial^\mu \varphi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)(\partial^\mu \varphi_2)}_{\mathcal{T}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2}_{-\mathcal{U}}$$

Wir suchen nun nach einem Minimum der Potentialfunktion $\mathcal{U}$, da der Feynman-Kalkül eine Art Störungsrechnung um den Grundzustand herum darstellt. Die Minima liegen auf einem Kreis mit Radius μ/λ:

$$\varphi_{1,min}^2 + \varphi_{2,min}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$



Um den Feynman-Formalismus anwenden zu können müssen wir nun um einen *bestimmten* Grundzustand („das Vakuum“) herum entwickeln, z.B. $\varphi_{1,min} = \mu/\lambda, \varphi_{2,min} = 0$. Dazu wählen wir zwei neue Felder, die *Fluktuationen um den Vakuumzustand* herum darstellen:

$$\eta := \varphi_1 - \mu/\lambda \qquad \text{und} \qquad \xi := \varphi_2$$

Dann lautet die umgeschriebene Lagrange-Funktion (es ist immer noch dieselbe!)

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\right] + \left[\mu\lambda(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2)\right] + \frac{\mu^4}{4\lambda^4}$$

Interpretation:

1. Klammer: freie Klein-Gorden-Lagrange-Funktion für Feld η mit Masse $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$
2. Klammer: freie Klein-Gorden-Lagrange-Funktion für *masseloses* Feld ξ → *Goldstone-Boson* (masseloses Skalarteilchen, d.h. Spin 0)
3. Klammer: Dreifeld- und Vierfeld-Kopplungen von η und ξ
4. Konstante

Goldstone-Theorem:

Bei spontaner Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie treten *immer* ein oder mehrere Goldstone-Bosonen auf.

Der Higgs-Mechanismus

S. G402ff.

Aussage: Der *Higgs-Mechanismus* verbindet

1. spontane Symmetriebrechung
2. *lokale* Eichinvarianz

Betrachten wir folgende Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^*(\partial^\mu\varphi) + \frac{1}{2}\mu^2(\varphi^*\varphi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\varphi^*\varphi)^2 \qquad \text{mit} \qquad \varphi := \varphi_1 + i\varphi_2$$

Sie entspricht derjenigen, mit der wir die Goldstone-Bosonen hergeleitet haben. Sie ist invariant unter *globalen* Eichtransformationen $\varphi \to e^{i\theta}\varphi$ und wir machen sie invariant unter *lokalen* Eichtransformationen

$$\varphi \to e^{i\theta(x)}\varphi$$

durch Einführung eines *masselosen Eichfeldes* A^μ und Ersetzung der partiellen durch *kovariante* Ableitungen

$$\mathcal{D}_\mu + \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu$$

Auf die so erhaltene lokal invariante Lagrange-Funktion wenden wir nun die Schritte der spontanen Symmetriebrechung an und erhalten mit der Wahl zweier Fluktuations-Felder $\eta := \varphi_1 - \mu/\lambda$ und $\xi := \varphi_2$ die folgende Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi)\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ & -2i\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)(\partial_\mu\xi)A^\mu + \left\{\frac{q}{\hbar c}\Big(\eta(\partial_\mu\xi)\xi(\partial_\mu\eta)\Big)A^\mu + \left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2\frac{\mu}{\lambda}\,\eta(A_\nu A^\mu)\right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2(\xi^2+\eta^2)(A_\nu A^\mu) - \mu\lambda(\eta^3+\eta\xi^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4+\xi^4+2\eta^2\xi^2)\right\} + \frac{\mu^4}{4\lambda^4}\end{aligned}$$

Interpretation:

1. Klammer: freie Klein-Gorden-Lagrange-Funktion für Feld η mit Masse $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$
2. Klammer: freie Klein-Gorden-Lagrange-Funktion für *masseloses* Feld ξ → *Goldstone-Boson* (masseloses Skalarteilchen, d.h. Spin 0)
3. Klammer: freies Eichfeld A^μ mit *Masse* $m_A = 2\sqrt{\pi}\frac{q\mu}{\lambda c^2}$
4. verdächtige Größe: inkorrekte Identifikation von Teilchen
5. Klammer: Kopplungen von η, ξ und A^μ
6. Konstante

Nutzt man die lokale Eichinvarianz aus und transformiert mit $\theta \stackrel{!}{=} -\tan^{-1}(\varphi_2/\varphi_1)$, so wird φ' reel, d.h. $\varphi_2' = 0$. *In dieser speziellen Eichung* reduziert sich die Lagrange-Funktion zu:

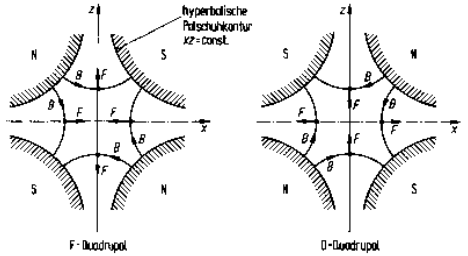
$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ & + \left\{\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2\frac{\mu}{\lambda}\,\eta(A_\nu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2\eta^2(A_\nu A^\mu) - \mu\lambda\eta^3 - \frac{\lambda^2}{4}\eta^4\right\} + \frac{\mu^4}{4\lambda^4}\end{aligned}$$

und übrig bleiben ein *schweres Skalar* η (*Higgs-Teilchen*) und ein *schweres Eichfeld* A^μ!

Strahlfokussierung in Teilchenbeschleunigern

S. B527f.

Aussage: Zur Fokussierung der Teilchenstrahlen in modernen Beschleunigern verwendet man *Quadrupolmagnete*, bei denen in einer Ebene fokussiert, in der dazu senkrechten Ebene hingegen defokussiert wird:



Eine Fokussierung kann man jedoch erreichen, indem man immer abwechselnd einen Quadrupolmagneten und einen um 90^o verdrehten Quadrupolmagneten einsetzt, wobei die Abstände dieser Magnetlinsen *kleiner als die dopplete Brennweite* sein müssen. Die Teilchen führen dann um die Sollbahn quasiharmonische Schwingungen aus, die man als *Betatronschwingungen bezeichnet*.

Synchrotron

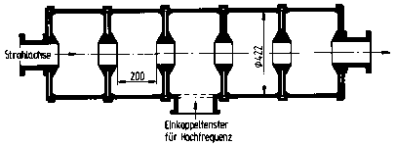
S. B534

Aussage: Ein *Synchrotron* ist ein Kreisbeschleuniger mit konstantem Radius. Die Felder in den Ablenk- und Fokussiermagneten werden hier *synchron* mit der Teilchenenergie erhöht.

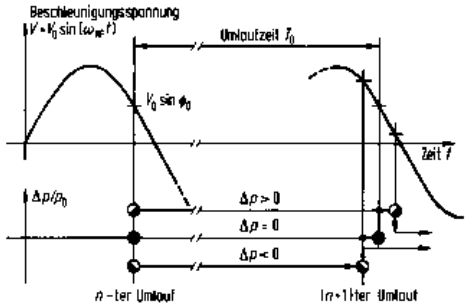
Beschleunigung von Teilchenstrahlen

S. B529f.

Aussage: Die Beschleunigung von Teilchenstrahlen in modernen Beschleunigern erfolgt durch supraleitende *Hohlraumresonatoren* (*Kavitäten*) mit einer Eigenfrequenz von typischerweise 200 MHz für Protonen und 500 MHz für Elektronen. Die Abbildung zeigt einen fünfzelligen Hohlraumresonator am PETRA-Speichering (DESY):



Um Teilchen, die einen geringeren Impuls als den Soll-Impuls p_0 haben, stärken zu beschleunigen und Teilchen, die einen größeren Impuls $p > p_0$ haben, weniger stark zu beschleunigen, findet die Beschleunigung statt, während Sinusschwingung gerade abfällt:



Auf diese Weise findet eine Phasenfokusierung statt, die eine quasiharmonische Schwingung der Teilchen um die Sollphase bewirkt, sogennante *Synchrotronschwingungen* mit wesentlich geringeren Frequenzen als die Betatronschwingungen.

Synchrotronstrahlung

S. B531

Aussage: In Kreisbeschleunigern erfahren die geladenen Teilchen bei der Ablenkung durch Dipolmagnete eine Zentripetalbeschleunigung, die nach den Gesetzen der Elektrodynamik zu einer Abstrahlung von Energie führt, der sogenannten *Synchrotronstrahlung*. Die *pro Umlauf abgestrahlte Energie* ergibt sich zu

$$U = \frac{e^2}{3\ \epsilon_0}\ \frac{E_0^4}{(m_0 c^2)^4}\ \frac{1}{R}$$

d.h. sie wächst mit der *vierten Potenz* (!) *der Strahlenergie* E_0 (Energie der Teilchen), fällt mit der vierten Potenz der Teilchenmasse m_0 und ist umgekehrt proportional zum Radius des Kreisbeschleunigers. Daher wird der LEP-Speicherring, in dem Elektronen und Positronen zur Kollision gebracht werden, keine Strahlenergien von über 100 GeV erzeugen können, sondern man ersetzt ihn durch den Proton-Antiproton-Speicherring LHC, da die Masse von Protonen etwa 1000 mal größer ist als die von Elektronen und $U \sim \frac{1}{m_0^4}$.

Luminosität eines Elektron-Positron-Beschleunigers

S. B536

Aussage: In einem Elektron-Positron-Speicherring mit m Teilchenpaketen pro Strahl, die jeweils N_- bzw. N_+ Teilchen enthalten ergibt sich eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = \frac{m\ N_-\ N_+\ f}{4\pi\ \sigma_x \sigma_y}$$

wobei f die Umlauffrequenz und σ_x bzw. σ_y die Varianzen der gaußförmig verteilten Teilchenpakete bezeichnen. Durch Minimalisierung der Varianzen kann man daher die Luminosität deutlich vergrößern.
Typische Werte für die Luminosität sind

$$\mathcal{L} = 10^{30} \cdots 10^{31}\ \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$

Wechselwirkung von Teilchen und γ-Strahlung mit Materie

S. B537ff./P334ff.

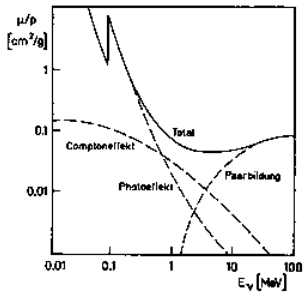
Aussage: Im Folgenden sind die wichtigsten Wechselwirkungen von Teilchen und γ-Strahlung mit Materie zusammengestellt:

geladene Teilchen	Anregung/Ionisation von Atomen Čerenkovstrahlung
Elektronen/Positronen	Bremsstrahlung
Photonen	Photoeffekt Compton – Effekt Paarbildung
neutrale Hadronen	Kernreaktionen

D.h. geladene Teilchen geben Energie über *elektromagnetische Wechselwirkung* ab, während die Wechselwirkung von Photonen mit Materie *in einem Punkt* stattfindet, so daß die Intensität I des Photonenstrahl exponentiell mit der Eindringtiefe l abnimmt:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu l}$$

Der Photoeffekt dominiert im keV Bereich, der Compton-Effekt bei wenigen MeV, darüber (Hochenergiephysik) ist nur noch die Paarbildung von Bedeutung:



Mögliche Kernreaktionen mit neutralen Hadronen sind die *Kernspaltung* im eV- bis keV-Bereich, *elastische & inelastische Streuung* im MeV-Bereich und *Hadronen-Erzeugung* im hochenergetischen Bereich.

Nachweis durch Anregung/Ionisation

S. B538f.

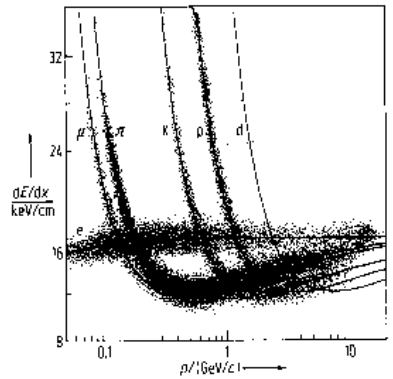
Aussage: *Geladene* Teilchen übertragen beim Durchgang durch Materie Energie auf *Elektronen*, wodurch Atome *angeregt* oder *ionisiert* werden. Der *mittlere Energieverlust pro Wegstrecke* ist dabei eine *universelle Funktion der Geschwindigkeit* des Teilchen unabhängig von dessen Masse m_0:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dx}(v)$$

Die genaue Abhängigkeit wird durch die Bethe-Bloch-Formel gegeben. Dabei ergibt sich ein *Minimum* bei

$$\frac{p}{m_o c} \approx 4$$

In *magnetischen Detektoren* mißt man den *Impuls* der Teilchen. Trägt man $\frac{dE}{dx}$ in Abhängigkeit des Impulses p auf, so ergeben sich *für unterschiedliche Teilchenmassen getrennte Kurven*:



Čerenkovstrahlung

S. P336

Aussage: Wenn geladene Teilchen ein Material mit einer Geschwindigkeit durchqueren, die *größer als die Lichtgeschwindigkeit im Material* $c' = \frac{c}{n}$ ist (n = Brechungsindex), so werden Photonen in einem Kegel mit Winkel

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n}$$

emittiert ($\beta = \frac{v}{c}$).

Ortsmessung in Teilchendetektoren

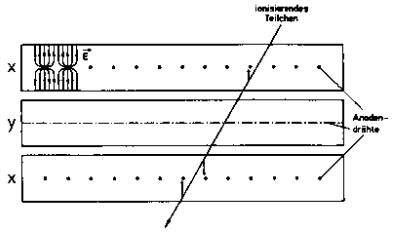
S. P336ff.

Aussage: Folgende Detektorelemente werden zur *Ortsmessung* eingesetzt:

- Optische Systeme: hier werden die Spuren von Teilchen sichtbar gemacht und fotographiert
  - Blasenkammern
  - Funkenkammern
  - Streamerkammern

  → in der modernen Teilchenphysik kaum mehr verwendet

- Proportionalkammern: flach, mit Gas gefüllt, viele dünne ($R \approx 10\mu$m) und nahe ($a \approx 2$ mm) Anoden-Drähte, die parallel und auf positiver Hochspannung (kV) gelegt sind; Kammerwände als Kathoden



  Die Feldstärke bei den Anodendrähten ist sehr hoch, so daß die Elektronen die Gasatome dort ionisieren und eine *Ladungslawine* entsteht, die einen *Spannungpuls im Draht* erzeugt
  ⇒ Ortsauflösung senkrecht zum Draht: halber Drahtabstand
  → bessere Auflösung durch mehrere Ebenen von Proportionalkammern

- Driftkammern: Prinzip wie Proportionalkammer, aber größerer Drahtabstand ($a \approx 1 - 10$ cm); Abstand und Gas so gewählt, daß v_{Drift} möglichst konstant; der Ort wird aus der linearen Beziehung

$$x = x_{\text{Draht}} + v_{\text{Drift}} \cdot (t_{\text{Draht}} - t_0)$$

  bestimmt, wo t_{Draht} der Zeitpunkt des Spannungspulses und t_0 der des Teilchendurchgangs ist, was man mit einem externen Detektor (z.B. Photomultiplier) mißt
  ⇒ Ortsauflösung: bis zu 50μm

- Siliziumstreifenzähler: auf einem Siliziumkristall sind im Abstand von 20μm Auslesestreifen angebracht, in dem beim Teilchendurchgang Elektron-Loch-Paare erzeugt werden
  → Ortsauflösung: bis zu 10μm

Energiemessung in Teilchendetektoren

S. P339ff./B547f.

Aussage: Es gibt im wesentlichen drei Sorten von Detektoren zur Energiemessung:

1. Halbleiterdetektoren: hier werden beim Teilchendurchgang erzeugte Elektron-Loch-Paare durch eine Spannung getrennt und als Spannungspuls nachgewiesen. Dabei wird nur eine Energie von

   3.6 eV in Silizium und 2.8 eV in Germanium

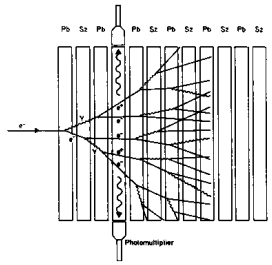
   zur Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares benötigt. Daher ergibt sich eine große Zahl dieser Paare und eine sehr gute Energieauflösung von etwa 10^{-3} bis 10^{-4}
   → allerdings nur bei niedrigeren Energie (Kernphysik) brauchbar

2. Elektromagnetische Kalorimeter: Elektronen/Positronen, Photonen ab 100 MeV besteht aus abwechselnd Absorbermaterie und Szintillator; in der Absorbermaterie bilden die Teilchen eine Kaskade aus Sekundärteilchen durch Paarbildung und Bremsstrahlung - die Dicke der Schicht beträgt daher ca. 15-25 Strahlungslängen; an den Szintillatoren sind Photomultiplier angeschlossen (siehe Abbildung); eine typisches e.-m. Kalorimeter besteht aus Blei als Absorber und einem der folgenden Szintillatoren:

   (a) Natriumjodid dotiert mit Thallium: geladene Teilchen lösen Photonen im sichtbaren Wellenlängenbereich aus
   → Energieauflösung von etwa 1-2%

   (b) Bleiglas: Schauerteilchen erzeugen Čerenkovlicht
   → Energieauflösung von etwa 3-5%

3. Hadronische Kalorimeter: Hadronen
   Diese erzeugen durch inelastische Reaktionen breiteren und stärker fluktuierenden Teilchenschauer als beim e.-m. Kalorimeter; auch hier wechseln sich Absorber (z.B. Eisen, Uran) und Nachweismaterial (z.B. organischer Szintillator) ab; leider wird im Nachweismaterial nur ein geringer Teil der urspr. Energie doponiert
   → Energieauflösung von etwa 30-80%



Für hochrelativistische Teilchen sind Energie- und Impulsmessung äquivalent, allerdings ist die Energiemessung oft genauer.

Impulsmessung in Teilchendetektoren

S. P338

Aussage: Den Impuls von geladenen Teilchen bestimmt man mit Hilfe ihrer Ablenkung in einem Magnetfeld B. Sei R der Radius der Kreisbahn des Teilchens, so erhält man die *zum Magnetfeld senkrechte Impulskomponente* mit folgender „Faustformel“

$$p_\perp \approx 0.3 \cdot B \cdot R \ \left[\frac{\mathrm{GeV/c}}{\mathrm{T\ m}}\right]$$

Die Teilchenbahn wird dabei z.B. mit einer Drahtkammer bestimmt. In *Magnetspektrometer* erhält man eine noch höhere Impulsauflösung, indem man die Teilchenspur vor und nach dem Magnetfeld bestimmt.

Teilchenidentifikation in Detektoren

S. P341f.

Aussage: Die Identifikation von Teilchen ist nicht einfach. Die Messung des Ladungsvorzeichens läßt sich zwar durch Ablenkung im Magnetfeld bestimmen, das Teilchenmasse jedoch meist nicht.
Folgende *Methoden der Teilchenidentifikation* sind *oberhalb* ca. 100 MeV/c *anwendbar*:

Teilchenart	**Nachweis über**
kurzlebige Teilchen	Zerfallsprodukte (Methode der invarianten Masse)
Neutrinos	Energie- & Impulsdefizite (d.h. nur indirekt)
Elektronen/Photonen	Schauer im e.-m. Kalorimeter
Myonen	große Durchdringungskraft (selbst durch dicke Eisenplatten)
geladene Hadronen	$\frac{dE}{dx}$-Messung, Čerenkov-Zähler, Übergangsstrahlungsdetektoren (s.u.)
Neutronen	Protonen aus elastischer Neutron-Proton-Streuung

Beim Übergang geladener Teilchen zwischen Materialien verschiedener Dielektrizitätskonstanten entseht eine Übergangsstrahlung, deren Intensität von $\gamma := \frac{E}{mc^2}$ abhängt. Diese kann mit Hilfe von *Übergangsstrahlungsdetektoren* bestimmt werden.